

*Ovde unesite naziv Vase škole , na primer Elektrotehnička škola Nikola Tesla, Zrenjanin

SEMINARSKI RAD

Predmet : Statistika
Tema : **Mere varijacije ili disperzije**

Profesor-mentor:
***ime mentora**

Učenik:
***Vase ime, razred**

Decembar, 2009.

Sadržaj

Mere varijacije ili disperzije	3
Razmak varijacije	4
Srednje apsolutno odstupanje.....	4
Varijansa	7
Standardna devijacija.....	11
Relativne mere varijacije	12
Standardizovano odstupanje (z- vrednosti)	12
Zaključak.....	15
Literatura	16

Mere varijacije ili disperzije

Pomoću srednjih vrednosti daje se karakteristika vrednostima obeležja koja su varijabilna. Ta замена je vnše ili manje uspešna zavisno od toga kolika su odstupanja pojedinačnih vrednosti od srednje vrednosti. Prema tome, varijacije otežavaju uspešno proučavanje pojava i fenomena. Što je varijacija veća to je srednja vrednost manje reprezentativna i obrnuto.

Tako su, na primer, poznati slučajevi serija koje imaju istu aritmetičku sredinu a različit varijabilitet vrednosti obeležja. Zbog toga se pored srednjih vrednosti uvode mere varijacije ili mere disperzije. To su pokazatelji varijacije (disperzije varijabiliteta) od srednje vrednosti. Odstupanje svake pojedinačne vrednosti od srednje vrednosti zove se devijacija, a odstupanje svih vrednosti od srednje vrednosti je disperzija.

¹ др Малиша Жижовић, др Сабахудин Мекић, др Мирјана Шекарић, „Пословна статистика“, ВПШ-Блаце 2003

Mere ili pokazatelji varijacije mogu biti apsolutne i relativne. Ako se varijabilitet iskazuje u apsolutnom iznosu zovu se apsolutnim merama varijacije a zavise od jedinica mere u kojima se pojava iskazuje (kilogrami, metri, sekunde, komadi itd.). Relativne mere varijacije pogodne su za upoređivanje varijabiliteta serija.

Apsolutne mere varijacije iskazuju vrednost obeležja pojava u apsolutnim brojevima, a to su:

- razmak varijacije,
- srednje apsolutno odstupanje (srednja devijacija),
- varijansa,
- standardna devijacija.

Relativne mere varijacije (vrednost obeležja pojava iskazuju se u relativnim brojevima tj. procentima), a to su:

- relativna varijansa,
- koeficijent varijacije,
- relativna devijacija.

Takođe treba pomenuti i tzv. normalizovano ili standardizovano odstupanje kao meru varijacije.

Razmak varijacije

Razmak varijacije obeležava se sa R . Daje grubu informaciju o disperziji obeležja. Predstavlja razliku između najveće i najmanje vrednosti obeležja:

$$R = X_{max} - X_{min}$$

Ova mera disperzije je najjednostavnija i najgrublja jer ne zavisi od svih vrednosti obeležja, već samo od ekstremnih vrednosti. A kada se radi o intervalnoj distribuciji sa otvorenim intervalima nepreciznost se uvećava. Samo jedna ekstremna vrednost uslovljava veličinu intervala varijacije. Kako je već ranije rečeno uticaj ekstremnih vrednosti se eliminiše interkvartilnom razlikom. Levo od donje i desno od gornje granice razmaka odstrani se po 25% statističke mase i tako se dobije interkvartilni razmak koji sadrži 50% statističke mase.

Preciznije mere varijabiliteta od pozicionih pokazatelja varijabiliteta su mere koje uzimaju u obzir sve vrednosti posmatranog obeležja. To su izračunate mere varijacije.

Srednje apsolutno odstupanje

Obzirom da je zbir svih odstupanja vrednosti obeležja od aritmetičke sredine jednak nuli, tako izračunata odstupanja ne mogu se koristiti za meru varijacije. Zbog toga se kao mera varijacije koristi srednje apsolutno odstupanje.

Srednje apsolutno odstupanje dobija se kada se zbir razlika vrednosti obeležja od aritmetičke sredine, bez obzira na predznak, podeli sa brojem elemenata u seriji. Svaki element serije zavisno od svoje veličine utiče na ovu meru disperzije.

Za negrupisane podatke (prosta serija podataka), srednje apsolutno odstupanje dobija se po sledećem obrascu:

$$SD = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - m|.$$

Za grupisane podatke (prosta distribucija frekvencija):

$$SD = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^r f_i |x_i - m|.$$

Za intervalnu distribuciju frekvencija:

$$SD = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^r f_i |x_{si} - m|$$

gde su

SD - srednje apsolutno odstupanje,

$|x_i - m|$ -apsolutna vrednost odstupanja od srednje vrednosti,
 f - frekvencija,
 N - ukupan broj podataka,
 $\sum f_i$ - ukupan broj podataka.

Primer: Broj izostanaka radnika sa posla u jednom pogonu za prvih šest meseci dat je u tabeli 1. Odrediti srednje apsolutno odstupanje.

Tabela.1. Broj izostanaka radnika sa posla u jednom pogonu³

Meseci	Broj izostanaka X	$x_i - m$	$ x_i - m $
1	5	-5	5
2	8	-2	2
3	9	-1	1
4	10	0	0
5	12	2	2
6	16	6	6
Z	60	0	16

Rešenje:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{60}{6} = 10$$

$$SD = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - m| = \frac{16}{6} = 2.67.$$

Kao što ce vidi postupak izračunavanja srednjeg apsolutnog odstupanja nije algebarski. Zanemareni su predznaci, što ograničava primenu ove mere varijacije.

Zbog toga se često koriste centralni momenti kao mera disperzije. Vrednost momenta je definisan u fizici a to je proizvod iz sile i rastojanja. Centralni moment predstavlja opadanje sile sa udaljavanjem od njenog centra.

Centralnim momentima se mere odstupanja vrednosti obeležja od aritmetičke sredine skupa na određeni stepen. Stepеноvanje odstupanja podataka od aritmetičke sredine vrši se od 0 do k - stepeni. To su takozvani centralni momenti k -tog reda ($k = 0,1,2,3,\dots$).

² Шошић, И., Примјењена Статистика, Школска књига, Загреб, 2004.

³ Керо, Б. Бојанић-Главица. Статистика у примјерима, Факултет организације и информатике, Вараждин, 2003

Matematički su definisani na sledeći način:

Za negrupisane podatke (prosta serija podataka)

$$M_0 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m)^0}{N}$$

$$M_1 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m)^1}{N}$$

$$M_2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m)^2}{N}$$

$$M_k = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m)^k}{N}.$$

Ako se zna da je svaki broj stepenovan sa nulom jednak 1, nulti moment je:

$$M_0 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m)^0}{N} = \frac{N}{N} = 1,$$

prvi moment je:

$$M_1 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m)^1}{N} = \frac{0}{N} = 0.$$

Centralni momenti računaju se pomoću pomoćnih momenata koji se označavaju sa t_k . Ako je $t = 0$

$$m_k = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^k}{N}$$

Prvi moment oko nule:

$$m_1 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - 0)}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = m.$$

Drugi moment oko nule:

$$m_2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - 0)^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}.$$

Za grupisane podatke (za prostu distribuciju frekvencija)

$$M_k = \frac{\sum_{i=1}^r f_i (x_i - m)^k}{N}$$

$$N = \sum_{i=1}^r f_i$$

$$M_k = \frac{\sum_{i=1}^r f_i (x_i - m)^k}{\sum_{i=1}^r f_i}.$$

Nulti moment (M_0) jednak je jedinici:

$$M_0 = \frac{\sum_{i=1}^r f_i (x_i - m)^0}{\sum_{i=1}^r f_i} = 1$$

Prvi moment (M_1) jednak je nuli:

$$M_1 = \frac{\sum_{i=1}^r f_i (x_i - m)^1}{\sum_{i=1}^r f_i} = 0.$$

Kod prvog centralnog momenta u brojiocu se javlja nula, a to je prva karakteristika aritmetičke sredine. Prema tome, prvi centralni moment (M_1) nije mera disperzije.

Varijansa

Drugi centralni moment je dobra mera disperzije. Naziva se varijansa a obeležava se sa malim grčkim slovom sigma na kvadrat (σ^2). Varijansa je minimalno srednje kvadratno odstupanje.

Kao što je već rečeno drugi centralni moment

$$M_2 = \frac{\sum_{i=1}^r f_i (x_i - m)^2}{N}$$

Zbog parnog stepena (kvadrata), sve vrednosti broji-oca biće pozitivne, tako se uklanjaju svi negativni predznaci⁴

⁴ Керо, Б. Бојанић-Главица. Статистика у примјерима, Факултет организације и информатике, Вараждин, 2003

$$M_2 = \sigma^2$$

Za negrupisane podatke:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m)^2}{N}$$

Za grupisane podatke:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^r f_i (x_i - m)^2}{N}, N = \sum_{i=1}^r f_i.$$

Za intervalnu distribuciju frekvencija:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^r f_i (x_{si} - m)^2}{N}$$

x_{si} - sredina intervala.

Prema tome, za izračunavanje varijanse prvo treba odrediti:

- aritmetičku sredinu (m),
- odstupanje vrednosti obeležja od aritmetičke sredine ($h_i - m$),
- kvadrate odstupanja vrednosti obeležja od aritmetičke sredine ($h_i - m$)²
- produkte kvadrata odstupanja i pripadajućih frekvencija $f_i x_i$ i $f_i (x_i - m)^2$
- Varijansa je minimalno srednje kvadratno odstupanje. Može se izračunati i preko običnih (pomoćnih) momenata.

Za negrupisane podatke:

$$\begin{aligned} &= \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m)^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i^2 - 2x_i m + m^2)}{N} \\ \sigma^2 &= \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 - 2m \sum_{i=1}^N x_i + \sum_{i=1}^N m^2}{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - 2m \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} + \frac{\sum_{i=1}^N m^2}{N} \\ \sigma^2 &= \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - 2m \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} + m^2 \end{aligned}$$

Prvi moment oko nule

$$m_1 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = m$$

Drugi moment oko nule:

$$m_2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}$$

Zamenom ovih vrednosti dobija se jednostavan obrazac za varijansu⁵

$$\sigma^2 = m_2 - 2m_1^2 + m_1^2$$

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2.$$

Za grupisane podatke:

$$\sigma^2 = M_2 = \frac{\sum_{i=1}^r f_i (x_i - m)^2}{\sum_{i=1}^r f_i}$$

$$\sigma^2 = M_2 = \frac{\sum_{i=1}^r f_i (x_i^2 - 2x_i m + m^2)}{\sum_{i=1}^r f_i}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^r f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^r f_i} - \frac{2m \sum_{i=1}^r f_i x_i}{\sum_{i=1}^r f_i} + \frac{m^2 \sum_{i=1}^r f_i}{\sum_{i=1}^r f_i}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^r f_i x_i^2}{N} - m^2, N = \sum_{i=1}^r f_i$$

$$\sigma^2 = m_2 - 2m_1^2 + m_1^2$$

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2.$$

⁵ Керо, Б. Бојанић-Главица. Статистика у примјерима, Факултет организације и информатике, Вараждин, 2003

Za intervalnu distribuciju frekvencija važe isti obrasci samo se umesto x_i uzimaju sredine intervala x_{si} .

Primer: Iz podataka intervalne distribucije frekvencija izračunati varijansu (σ^2).

x	0-2	3-5	6-8	9-11	12-14
f	4	6	13	8	2

Rešenje: Radna tabela

x	x_{si}	f_i	x_{si}^2	$f_i x_{si}$	$f_i x_{si}^2$
0-2	1	4	1	4	4
3-5	4	6	16	24	96
6-8	7	13	49	91	637
9-11	10	8	100	80	800
12-14	13	2	169	26	338
Σ		33		225	1875

Aritmetička sredina:

$$m = \frac{\sum f_i x_{si}}{N} = \frac{225}{33} = 6.82$$

Varijansa:

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_{si}^2}{N} - m^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1875}{33} - 6.82^2$$

$$\sigma^2 = 56.82 - 46.51$$

$$\sigma^2 = 10.31$$

Skraćeni postupak računanja:

Radna tabela

$x_{si} - 7$	f_i	$(x_{si} - 7)f_i$	x_{si}^2	$(x_{si} - 7)^2 f_i$
-6	4	-24	36	144
-3	6	-18	9	54
0	13	0	0	0
3	8	24	9	72
6	2	12	36	72
Σ	33	-6		342

$$a) m - 7 = -\frac{6}{33}$$

$$m = 7 - \frac{6}{33} = 6.82$$

$$b) \sigma^2 = \frac{342}{33} - 0.18^2 = 10.31$$

Standardna devijacija

Varijansa kao mera disperzije računa se preko kvadrata vrednosti obeležja i samim tim daje veću vrednost varijabiliteta. Zbog toga se za meru varijacije uzima kvadratni koren iz varijanse. Tako dobijana vrednost je pozitivna.

Kvadratni koren iz varijanse ($\sqrt{\sigma^2} = \sigma$), pa je σ oznaka za standardnu devijaciju. Standardna devijacija zapravo pokazuje koliko u proseku vrednosti obeležja odstupaju od aritmetičke sredine.

Za negrupisane podatke koriste se sledeći obrasci:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2}$$

ili

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - m^2}$$

Za grupisane podatke:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^r f_i (x_i - m)^2}$$

ili

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^r f_i x_i^2 - m^2}$$

gde je

$$N = \sum_{i=1}^r f_i \text{ и } m = \frac{\sum_{i=1}^r f_i x_i}{N}$$

Standardna devijacija je apsolutna mera varijacije. NJen veliki iznos ne znači veliku disperziju vrednosti obeležja već može da znači da su vrednosti obeležja u seriji velike i obrnuto.

Relativne mere varijacije

Ako su pak serije obeležja date u različitim jedinicama za upoređivanje varijabiliteta koriste se mere koje se iskazuju u relativnim vrednostima. Veličina definisana kao količnik između varijanse i kvadrata aritmetičke sredine:

$$V_x^2 = \frac{\sigma^2}{m^2}$$

naziva se relativna varijansa, a obeležava se sa V_x^2 . Ova veličina ne zavisi od jedinice mere.

Relativna varijansa najčešće se koristi u statističkoj teoriji uzorka. Sledeća relativna mera varijabiliteta zove se koeficijent varijacije. Koeficijent varijacije služi za upoređivanje varijabiliteta dve ili više serija u kojima su obeležja izražena u različitim jedinicama mere.

Koeficijent varijacije obeležava se sa V_x a računa se po sledećem obrascu:

$$V_x = \frac{\sigma}{m}$$

Koeficijent varijacije se uglavnom izražava u procentima. Omogućava takođe i upoređivanje varijabiliteta serija ako su im obeležja data u istim jedinicama mere a imaju različite aritmetičke sredine. Koeficijent varijacije je i pokazatelj grupisanosti obeležja oko aritmetičke sredine. Vrednost koeficijenta varijacije je manja kod obeležja više grupisanih oko aritmetičke sredine i obrnuto.

Standardizovano odstupanje (z- vrednosti)

Odstupanje bilo koje vrednosti od aritmetičke sredine izraženo u jedinicama standardne devijacije zove se normalizovano ili standardizovano odstupanje.

Za h posmatrano obeležje dobija se z - standardizovano obeležje čiji je algebarski izraz:

$$z = \frac{x - m}{\sigma}$$

Standardizovano obeležje ima sledeće karakteristike:

1. Aritmetička sredina distribucije standardizovanog obeležja jednaka je nuli:

$$z = \frac{\sum_{i=1}^N z_i}{N}, \quad z_i = \frac{x_i - m}{\sigma}$$

$$z = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i - m}{\sigma}}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m)}{\sigma N}$$

$$z = 0 \text{ jer je } \sum_{i=1}^N (x_i - m) = 0$$

2. Standardna devijacija distribucije standardizovano-g obeležja jednaka je jedan:

$$\sigma_z^2 = \frac{\sum_{i=1}^N z_i^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - m)^2}{\sigma^2}}{N},$$

$$\sigma_z^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m)^2}{N \sigma^2}$$

$$\sigma_z^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m)^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - m)^2}$$

$$\sigma_z^2 = 1, \sigma_z = 1$$

Standardizovana obeležja imaju veliki značaj kod statističkog zaključivanja.

Primer 1: Na osnovu podataka datih u tabeli:

x	0-3	4-7	8-11	12-15
f	4	5	12	7

6

Izračunati:

- a) Disperziju
- b) Standardnu devijaciju
- v) Koeficijent varijacije

Rešenje:

Radna tabela

x	f	x_i	x_i^2	fx_i	fx_i^2
0 - 3	4	1,5	2,25	6,00	9,00
4 - 7	5	5,5	30,25	27,50	151,25
8 - 11	12	9,5	90,25	114,00	1083,00
12 - 15	7	13,5	182,25	94,50	1275,75
Σ	28	-	-	242	2519

a) aritmetička sredina:

$$m = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{242,00}{28} = 8,64$$

⁶ Шошић, И., Примијењена Статистика, Школска књига, Загреб, 2004.

disperzija:

$$\delta^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - m^2 = \frac{2519}{28} = 8,64^2$$

$$\delta^2 = 89,96 - 74,64 = 15,32$$

b) standardna devijacija

$$\delta = \sqrt{\delta^2} = \sqrt{15,32} = 3,91$$

v) koeficijent varijacije

$$V_x = \frac{\delta}{m} = \frac{3,91}{8,64} = 0,45$$

Zaključak

Možemo zaključiti da se pomoću srednjih vrednosti daje se karakteristika vrednostima obeležja koja su varijabilna. Ta zamena je vnše ili manje uspešna zavisno od toga kolika su odstupanja pojedinačnih vrednosti od srednje vrednosti. Prema tome, varijacije otežavaju uspešno proučavanje pojava i fenomena. Što je varijacija veća to je srednja vrednost manje reprezentativna i obrnuto.

Posetite nas klikom na sajtovima ispod:

[SEMINARSKI RADOVI](#) [DIPLOMSKI](#) [MATURSKI RAD](#)
[SEMINARSKI](#) [DIPLOMSKI RAD](#) [SEMINARSKI](#)
[ESEJI](#) [FACEBOOK SEMINARSKI](#)

Uspostavljanjem ovog projekta, zadovoljila se i veoma prisutna potreba za specijalizovanim timom, koji će na studente i omladinu pravovremeno i adekvatno delovati u edukativnom i pozitivno usmeravajućem pravcu, ali i predstavljati efikasnu podršku u pisanju sopstvenih radova (seminarskih, maturskih, maturalnih, diplomskih, master, magistarskih, doktorskih, eseja)
TIM VRHUNSKIH PREVODILACA PREVODI ZA VAS SA I NA SLEDEĆE JEZIKE:
ENGLESKI, FRANCUSKI, ŠPANSKI, NEMAČKI, ITALIJANSKI

Literatura

- ❖ dr Mališa Žižović, dr Sabahudin Mekić, dr Mirjana Šekarić, „Poslovna statistika“, VPŠ-Blace 2003
- ❖ Kero, B. Bojanić-Glavica. Statistika u primjerima, Fakultet organizacije i informatike, Varaždin, 2003.
- ❖ Šošić, I., Primijenjena Statistika, Školska knjiga, Zagreb, 2004.
- ❖ <http://en.wikipedia.org/wiki/Statistics>