

XV. gimnazija
Jordanovac 8
10 000, Zagreb

Pobjednicke strategije determinističkih igara

Mentor: Xxxx Xxxxx, prof.

Učenik: Xxxxx Xxxx 4.h

Zagreb, travanj 20xx.

Sadržaj:

Uvod	3
1. Kombinatorne igre	4
1.1 Što su kombinatorne igre?	4
1.2 Pobjedničke i gubitničke pozicije	5
1.3 Igre oduzimanjem	7
2. Igra Nim	10
2.1 Opis igre	10
2.2 Nim-suma	11
2.3 Teoremi i dokazi	13
2.4 Misère Nim	17
2.5 Varijacije na temu	21
2.6 Stroj koji igra Nim	24
3. Dodaci	27
3.1 Igra Nim za računalo	27
3.2 Film <i>Prošle godine u Marienbadu</i>	27
3.3 Čitač misli	27
4. Zaključak	28
5. Zahvale	29
6. Popis literature	30

Uvod

Za maturalni rad izabrao sam temu iz matematike 'Pobjedničke strategije determinističkih igara'. Prvo sam mislio da ću izabrati teoriju igara kao svoju temu, ali sam doznao da se teorija igara ne bavi ni približno takvim stvarima kao što su matematičke igre. Ime teorija igara asocira nas na potpuno druge stvari od onoga čime se ona zapravo bavi i to je ono što je kako mene, tako i mnoge druge zavaralo.

Evo kako je to objašnjeno u elektronskom časopisu math.e: "Teorija igara je matematička disciplina koja se razvila sredinom 20. stoljeća. U početku je glavna motivacija za razvoj bila ekonomska, ali je teorija igara našla primjene i u drugim društvenim znanostima, vojne primjene, pa čak i primjene u biologiji. Pojednostavljeno rečeno, teorija igara bavi se situacijama konflikta između dvaju ili više sudionika. Riječ igra odnosi se na bilo kakav konflikt dviju suprotstavljenih strana koji želimo analizirati. To ne mora biti društvena igra, niti sudionici moraju biti osobe, usprkos tome što ih nazivamo igračima."

Želio sam pisati o matematičkim igrama sa relativno jednostavnom pobjedničkom strategijom i zato sam, uz konzultacije sa profesoricom izabrao ovu temu. Naslov koji sam izabrao obuhvaća široko i vrlo zanimljivo područje u matematici i namjerno je takav, jer tada još nisam znao kojom ću se igrom konkretno baviti, tj. hoće li biti jedna ili više njih. Odlučio sam se za igru Nim, detaljno ću je analizirati i pokazati njenu pobjedničku strategiju.

1.1 Što su kombinatorne igre?

Kombinatorne igre imaju nekoliko bitnih značajki. U njima sudjeluju dva igrača, nema elemenata slučajnosti i mogu završiti samo pobjedom jednog, odnosno porazom drugog igrača - nemoguće je da igra završi neriješeno. Poblize ćemo objasniti kakve su to kombinatorne igre na jednostavnom primjeru.

Primjer 1:

U igri sudjeluju dva igrača, igrač 1 i igrač 2. Na stolu se nalazi hrpa od 21 žetona, i igrači naizmjenice uzimaju žetone s hrpe. Mogu uzeti minimalno jedan i maksimalno tri žetona. Igrač koji uzme zadnji žeton (odnosno žetone) je pobjednik.

Kako možemo protumačiti ovu igru? Koji igrač će lakše pobijediti, prvi ili drugi? Postoji li neka strategija koja će igračima omogućiti pobjedu?

Najlakše ćemo odgovoriti na ova pitanja ako analiziramo ovu igru od kraja prema početku.

Ako je ostao jedan, dva ili tri žetona, igrač koji je na potezu jednostavno pobjeđuje tako da uzme sve žetone.

Pretpostavimo da su ostala četiri žetona. Igrač koji je na potezu mora ostaviti jedan, dva ili tri žetona i njegov protivnik moći će pobijediti. To jest, četiri žetona znače poraz za igrača koji je na potezu, a pobjedu za prethodnog igrača (onog koji je ostavio četiri žetona iza sebe).

Ako je ostalo pet, šest ili sedam žetona igrač koji je na potezu može pobijediti tako da smanji broj žetona na četiri.

Ako je ostalo osam žetona, igrač koji je na potezu mora ostaviti pet, šest ili sedam žetona i njegov protivnik će pobijediti.

Lako možemo primijetiti da su pozicije 0, 4, 8, 12, 16,... pozicije kojima moramo težiti. Sad možemo odgovoriti na postavljena pitanja. Budući da 21 nije djeljivo sa 4, prvi igrač koji je na potezu moći će pobijediti. Postoji samo jedan potez koji će omogućiti pobjedu prvom igraču, a to je da makne samo jedan žeton i ostavi preostalih 20 na hrpi. Ako se bude pridržavao svojevrsne 'pobjedničke strategije' i stalno ostavljao svom protivniku pozicije djeljive sa četiri, neminovno će pobijediti.

Sad možemo definirati kombinatorne igre puno preciznije. Kombinatorne igre su igre koje zadovoljavaju sljedeće uvjete:

- Sudjeluju 2 igrača
- Postoji set, načešće konačan, mogućih pozicija u igri
- Pravila igre određuju za oba igrača i za svaku poziciju koji potezi u neku drugu poziciju su dozvoljeni. Ako u pravilima ne postoji razlika između igrača, odnosno ako oba igrača imaju iste mogućnosti pomicanja sa svake pozicije (mogući potezi u neku drugu poziciju ovise jedino o poziciji, a ne o igraču), igra je nepristrana; u protivnom, igra je pristrana (npr. šah je pristrana igra - jedan igrač smije pomicati samo bijele figure, a drugi crne).
- Igrači igraju naizmjenično
- Igra je gotova kad se dođe do pozicije iz koje nisu mogući daljnji potezi. Ako se igra po normalnim pravilima, zadnji igrač koji napravi

potez pobjeđuje. Ako se igra po takozvanim “misère” pravilima, zadnji igrač koji napravi potez gubi.

Ako igra nikada ne završi, proglašava se neriješen rezultat. Ipak, skoro uvijek ćemo dodati uvjet koji eliminira mogućnost neriješenog rezultata.

➤ Igra završava konačnim brojem poteza bez obzira na to kako se igra.

Bitno je primijetiti što je izostavljeno u ovoj definiciji. Nisu dozvoljene slučajne radnje kao što je bacanje kocaka ili miješanje karata. Ovo isključuje igre kao npr. poker. Kombinatorne igre su igre s potpunom informacijom: istovremeni i skriveni potezi nisu dozvoljeni. Ovo isključuje “kamen-škare-papir” i “potapanje brodova”. Nije moguće da igra završi neriješeno ako postoji konačan broj poteza. Ovo isključuje igre kao što je “križić - kružić”.

1.2 Pobjedničke i gubitničke pozicije

Ako se prisjetimo igre iz primjera 1, vidimo da su pozicije 0, 4, 8, 12, 16, ... pobjedničke za prethodnog igrača (igrača koji je ostavio tu poziciju) i da su pozicije 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, ... pobjedničke za sljedećeg igrača (onog koji je na potezu). Mi igru promatramo iz svoje perspektive, iz perspektive igrača koji je završio s potezom. Nas zanimaju one pozicije koje mi moramo ostaviti svom protivniku. Promatrat ćemo te pozicije jer želimo osigurati pobjedu sebi, a ne protivničkom igraču; isto tako protivnički igrač želi osigurati pobjedu sebi, a ne nama. One pozicije koje osiguravaju pobjedu nama, igraču koji je završio s potezom, nazvat ćemo sigurne pozicije. Svakom igraču cilj je iza sebe ostaviti sigurne pozicije. One pozicije koje osiguravaju pobjedu našem protivniku nazvat ćemo nesigurne pozicije. Sigurne pozicije nazivaju se još pobjedničke pozicije ili P-pozicije (jer osiguravaju pobjedu prethodnom igraču, eng. **Previous player**). Nesigurne pozicije nazivaju se još gubitničke pozicije ili N-pozicije (osiguravaju pobjedu sljedećem igraču, eng. **Next player**).

Svaka sigurna pozicija postaje nesigurna BILO KOJIM potezom, također, svaka nesigurna pozicija postaje sigurna ISPRAVNIM potezom.

Možemo zaključiti da se optimalna igra sastoji u tome da se svaka nesigurna pozicija koja nam je ostavljena promijeni u sigurnu poziciju. Recimo, ako nam je ostavljeno pet, šest ili sedam žetona, naš idealan potez bit će da maknemo jedan, dva, odnosno tri žetona i svom protivniku ostavimo četiri žetona. Ostavili smo iza sebe sigurnu poziciju i koliko god žetona naš protivnik makne, mi ćemo moći maknuti preostale i na kraju pobijediti. U slučaju da je naš protivnik nama ostavio 8 žetona, a to je sigurna pozicija za njega, mi nećemo imati izbora i morat ćemo ostaviti pet, šest, ili sedam žetona. On će tada nama ostaviti četiri, mi njemu jedan, dva ili tri i on će jednostavno pobijediti tako da uzme preostale žetone.

U nepristranim kombinatornim igrama, lako se može odrediti koje pozicije su P-pozicije, a koje N-pozicije, krećući od tzv. terminalnih, odnosno krajnjih pozicija. Krajnje pozicije su one pozicije iz kojih nikakvi pomaci nisu mogući.

- Korak 1: Označimo svaku krajnju poziciju kao P-poziciju.
- Korak 2: Označimo svaku poziciju iz koje se može doći do prethodno označene P-pozicije u jednom potezu kao N-poziciju
- Korak 3: Nađemo pozicije iz kojih se može doći jedino do označenih N-pozicija; označimo takve pozicije kao P-pozicije
- Korak 4: Ako nisu nađene nove pozicije u koraku 3, završili smo; u protivnom, vraćamo se na korak 2.

Lako možemo primijetiti da nam strategija pomicanja u P-pozicije donosi pobjedu. Iz P-pozicije, naš protivnik može se pomaknuti samo u N-poziciju (3). Tada se mi opet možemo vratiti u neku drugu P-poziciju (2). Naposljetku igra završava u krajnjoj poziciji i budući da je to P-pozicija, mi pobjeđujemo (1).

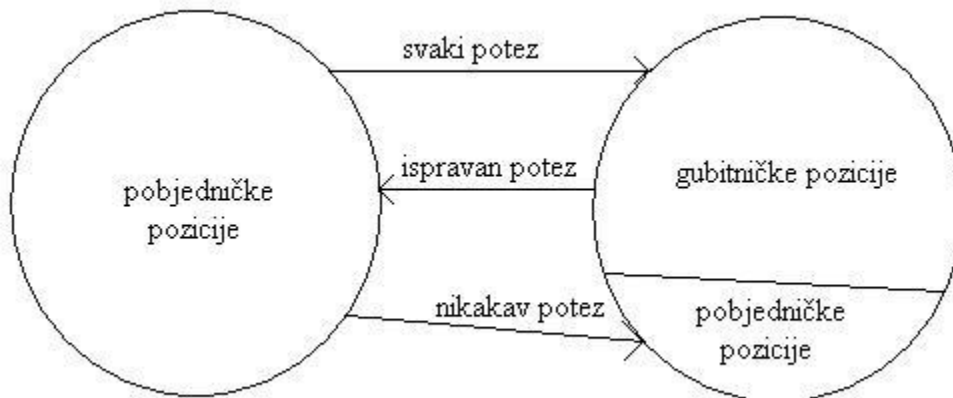
Slijedi karakterizacija P i N-pozicija koja vrijedi za nepristrane kombinatorne igre, koje ne završavaju neodlučeno i koje se igraju po normalnim pravilima.

P-pozicije i N-pozicije definirane su sljedećim trima tvrdnjama.

- ✗ Sve krajnje pozicije su P-pozicije
- ✗ Iz svake N-pozicije postoji barem jedan potez koji vodi u P-poziciju
- ✗ Iz svake P-pozicije, svaki potez vodi u N-poziciju

Ako se igra po misère pravilima, prva tvrdnja se mijenja - sve krajnje pozicije su N-pozicije.

Promotrimo to na sljedećem grafičkom prikazu:



Znači, iz pobjedničke pozicije ne može se opet doći u pobjedničku poziciju, a iz gubitničke pozicije, ispravan potez vodi u pobjedničku poziciju, neispravan opet u gubitničku.

1.3 Igre oduzimanjem

Neka je S skup pozitivnih brojeva, koji se mogu u jednom potezu uzeti sa hrpe na kojoj se nalazi n žetona. U primjeru 1, skup S je sadržavao brojeve 1, 2 i 3, $S = \{1, 2, 3\}$. Pokušajmo analizirati igru u kojoj je $S = \{1, 3, 4\}$ tako da nađemo njene P-pozicije.

Postoji točno jedna krajnja pozicija, a to je 0. 1, 3 i 4 su N-pozicije jer u jednom potezu mogu postati 0. Nadalje, 2 mora biti P-pozicija jer je jedini dozvoljen potez iz 2 u 1, a 1 je N-pozicija. 5 i 6 su N-pozicije jer mogu postati 2 ako se oduzmu 3 odnosno 4 žetona. Vidimo da 7 mora biti P-pozicija zbog toga što jedini mogući potezi iz 7 vode u 6, 4, ili 3, od kojih su svi N-pozicije. 8, 10 i 11 su N-pozicije, 9 je P-pozicija, 12 i 13 su N-pozicije, 14 je P-pozicija.

Možemo primjetiti da je skup P-pozicija jednak $P = \{0, 2, 7, 9, 14, 16, \dots\}$. Ako bolje pogledamo, vidimo da su svi brojevi djeljivi sa 7 ili pri djeljenju sa 7 daju ostatak 2. Skup N-pozicija je $N = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, \dots\}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
pozicija	P	N	P	N	N	N	N	P	N	P	N	N	N	N	P

Raspored *PNPNNNN* ponavlja se u beskonačnost.

Tko će pobijediti u igri sa 100 žetona, prvi ili drugi igrač?

P-pozicije su svi brojevi koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 0 ili 2. 100 daje ostatak 2 kad se podijeli sa 7, što znači da je 100 P-pozicija. Zaključujemo da drugi igrač može pobijediti pod pretpostavkom da se pridržava pobjedničke strategije, odnosno da iz početne N-pozicije koju mu je protivnik ostavio, dođe u P-poziciju i da taj postupak ponavlja sve dok ne uzme i posljednji žeton.

Primjer 2:

Promotrimo sada opet igru iz primjera 1, ali misère verziju. Znači, dva igrača naizmjenice uzimaju žetone s hrpe, mogu uzeti jedan, dva ili tri žetona. Onaj tko uzme zadnji žeton gubi.

Krećemo od krajnje pozicije, a to je 0. Ako se prisjetimo pravila o određivanju P i N-pozicija, vidimo da su sve krajnje pozicije N-pozicije. 1 je P-pozicija, jer se iz nje može doći jedino u N-poziciju. 2 je N-pozicija jer protivnik može uzeti samo jedan žeton i tako doći u P-poziciju (pod pretpostavkom da protivnik želi pobijediti, inače bi uzeo 2 žetona i izgubio). 3 i 4 su također N-pozicije jer se iz njih može doći u P-poziciju tako da se

oduzmu 2 odnosno 3 žetona. 5 je P-pozicija jer koji god potez napravili, doći ćemo u N-poziciju, u 2, 3 ili 4. 6, 7 i 8 su N-pozicije, 9 je P-pozicija, 10, 11 i 12 su N-pozicije itd.

Skup P-pozicija je $P = \{1, 5, 9, 13, 17, \dots\}$

Skup N-pozicija je $N = \{0, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, \dots\}$

Iz ovoga vidimo da, ako se na hrpi nalazi 21 žeton, prvi igrač koji bude igrao neizbježno će doći u N-poziciju, otvarajući tako mogućnost drugom igraču da ostavi iza sebe sigurnu poziciju i na kraju pobijedi.

Primjer 3:

Pretpostavimo da se na hrpi nalazi velik broj žetona i da se u svakom potezu može maknuti 1-6 žetona. Pokušajmo pronaći P-pozicije. Ako se na hrpi nalazi 31 žeton, koji je pobjednički potez? Koji igrač će pobijediti, prvi ili drugi (pod pretpostavkom da se nijednom ne zabune)?

a) Igra se po normalnim pravilima.

b) Igra se po misère pravilima

a) Normalna pravila

0 je P-pozicija. 1, 2, 3, 4, 5, 6 su N-pozicije jer se u jednom potezu iz njih može doći u P-poziciju. 7 je P-pozicija. 8, 9, 10, 11, 12, 13 su N-pozicije, itd.

Skup $P = \{0, 7, 14, 21, 28, 35, \dots\}$

Skup $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, \dots\}$

Ako se na hrpi nalazi 31 žeton, prvi igrač koji bude igrao moći će pobijediti tako da makne 3 žetona i svom protivniku ostavi 28 žetona, a to je P-pozicija. Koliko god žetona makne drugi igrač ostavit će iza sebe N-poziciju, otvarajući time mogućnost prvom igraču da naposljetku pobijedi.

b) Misère pravila

0 je N-pozicija. 1 je P-pozicija. 2, 3, 4, 5, 6, 7 su N-pozicije. 8 je P-pozicija, 9, 10, 11, 12, 13, 14 su N-pozicije, itd.

Skup $P = \{1, 8, 15, 22, 29, \dots\}$

Skup $N = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, \dots\}$

Ako se na hrpi nalazi 31 žeton, prvi igrač će također imati prednost jer je početna pozicija N-pozicija. Pomicanjem 2 žetona, ostavit će drugom igraču P-poziciju i na kraju, igrajući optimalno, pobijediti.

Ako pažljivije pogledamo, možemo uočiti da se tu pojavljuju neke zakonitosti. Ako tražimo P-pozicije, a dozvoljeno je uzimanje, npr. 1-3 žetona sa hrpe na kojoj se nalazi određen broj žetona, P-pozicije biti će $\{0, 4, 8, 12, 16, \dots\}$. Ako se igra po misère pravilima, P-pozicije biti će $\{1, 5, 9, 13, 17, \dots\}$.

Općenito, ako se može uzeti 1 do n žetona,

P-pozicije za normalna pravila bit će $\{0, 1 + n, 2 \cdot (1 + n), 3 \cdot (1 + n), 4 \cdot (1 + n), \dots\}$

P-pozicije za misère pravila bit će $\{1, 1 + (1 + n), [1 + (1 + n)] + (1 + n), \dots\}$

Znači, prva P-pozicija je 1. Svaka sljedeća P-pozicija dobije se tako da se prethodnoj doda $(1 + n)$.

P-pozicije su te koje nas zanimaju, i kad nađemo njih, lako ćemo naći i N-pozicije - to su naime svi preostali brojevi.

2. Igra Nim

Jedna od najstarijih i najprivlačnijih matematičkih igara, poznata je danas pod imenom Nim. Porijeklo nije točno poznato, ali se smatra da korijene vuče još iz stare Kine. Matematičar Charles Leonard Bouton prvi je u potpunosti objasnio i analizirao igru davne 1902. uz pomoć binarnih brojeva. On je igru nazvao Nim, vjerojatno po zastarjelom engleskom glagolu koji znači uzeti, odnosno ukrasti ili po njemačkom glagolu nehmen, točnije imperativu tog glagola nimm, koji također znači uzeti. Igra je vrlo zanimljiva zbog svoje prividne složenosti, a u isto vrijeme krajnje jednostavne i potpune matematičke teorije. Postala je još popularnija nakon kultnog filma “*Last year at Marienbad*”, izvorno “*L'année dernière à Marienbad*”.

2.1 Opis igre



Na stolu se nalaze najčešće tri (također vrlo često četiri ili pet) redova žetona. Broj žetona u jednom redu je proizvoljan, jedino ograničenje je da u dva reda ne bude isti broj žetona. U principu broj redova i žetona i nije toliko bitan, ali bi bilo nepraktično igrati Nim sa 20 redova i 30 do 50 žetona u svakom redu. Danas nije nikakav problem tako nešto isprogramirati, ali prije dok se Nim igrao s kovanicama ili kamenčićima takvi

veliki brojevi bili bi itekakav problem. Dakle, ova ograničenja i početne kombinacije čisto su praktične naravi.

U igri sudjeluju dva igrača koja naizmjenice uzimaju žetone iz nekog odabranog reda. Ne može se uzimati žetone iz više od jednog reda u jednom potezu, ali iz odabranog reda može se uzeti proizvoljno mnogo žetona, pa čak i cijeli red. Igrač koji uzme zadnji žetom je pobjednik.

Najpopularnije kombinacije su dakle (3, 4, 5) - znači, u prvom redu 3 žetona, u drugom 4, u trećem 5. Osim te, poznate su i kombinacije (5, 7, 9), (3, 4, 5, 6), (1, 3, 5, 7), itd.

Promatramo Nim sa tri reda. Postoji točno jedna krajnja pozicija, (0, 0, 0), koja je slijedom navedenog, P-pozicija. Rješenje Nim-a sa samo jednim redom je trivijalno: jednostavno treba uzeti cijeli red. Svaka pozicija sa točno jednim ne-praznim redom, recimo (0, 0, x) je, stoga, N-pozicija, jer se iz nje može doći do P-pozicije. Razmotrimo Nim sa dva ne-prazna reda. Lako je vidjeti da su P-pozicije one u kojima ta dva reda imaju jednak broj žetona, (0, 1, 1), (0, 2, 2), itd. To je zbog toga jer ako je protivnikov red za pomicanje iz takve pozicije, on mora doći u poziciju u kojoj nije jednak broj žetona u oba reda, i tako sve dok ne dođe u poziciju (0, 1, 1) kad će morati uzeti jedan žeton iz nekog reda, ostavljajući posljednji žeton, a s njime i pobjedu, nama.

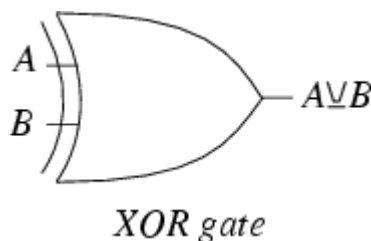
Ako nijedan od tri reda nije prazan, stvari se malčice kompliciraju. Pozicije (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 2) i slične su N-pozicije jer svaka od njih može biti pomaknuta u jednu od prethodno otkrivenih P-pozicija, (x, x, 0). Sljedeća najjednostavnija pozicija je (1, 2, 3) i mora biti P-pozicija jer može biti pomaknuta jedino u neku N-poziciju. Ako nastavimo, vidjet ćemo da su (1, 4, 5) i (2, 4, 6) također P-pozicije. Kad bi željeli saznati je li (5, 7, 9) ili (15, 23, 30) P-pozicija, jako bi teško došli do odgovora. Budući da je način na koji ćemo odgovoriti na ovo pitanje prilično nevjerovatan i neočekivan, i uključuje nešto što se zove nim-suma, rješenje nije očito.

2.2 Nim-suma

Nim-suma dva prirodna broja je njihov zbroj *bez ostatka* u bazi 2. Znači, brojeve koje želimo zbrojiti napišemo u binarnom obliku jedan ispod drugog (poravnamo desno) i jednostavno zbrojimo, ali s tim da ne prenosimo jedinice i nule u sljedeći stupac \Rightarrow zbrajamo *bez ostatka*.

Nim-suma brojeva $(x_m \dots x_0)_2$ i $(y_m \dots y_0)_2$ je $(z_m \dots z_0)_2$, pišemo $(x_m \dots x_0)_2 + (y_m \dots y_0)_2 = (z_m \dots z_0)_2$, gdje je za svaki k, $(x_k + y_k) \bmod 2 = z_k$. Odnosno, ako promatramo svaki stupac posebno, zbrojimo sve jedinice u određenom stupcu, i nim-suma tog stupca je 0 ako je paran broj jedinica (ostatak pri dijeljenju sa 2 je 0) i jedan ako je neparan broj jedinica.

Nim-suma poznata je još i pod imenom XOR suma ("exclusive disjunction", odnosno "exclusive or" - isključiva disjunkcija)



Ona je istinita ako je točno jedan uvjet istinit. Nema standardni simbol, ali ponekad se označava sa $A \underline{\vee} B$. Taj simbol čita se A “aut” B, pri čemu je “aut” latinska riječ za “ili jedno ili drugo, ali ne oboje” (*Aut Caesar aut nihil*).

Najbolje ćemo to vidjeti na istinitosnoj tablici.

A	B	$A \underline{\vee} B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Isključiva disjunkcija je istinita ako je točno jedan uvjet istinit, što se iz tablice i vidi.

$$A \underline{\vee} B = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$

1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	
0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0

→ Crveni stupci se poklapaju, znači istinitosna tablica vrijedi

Taj izraz može se još prikazati i kao

$$A \underline{\vee} B = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$

$$= (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$$

$$A \underline{\vee} B = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$

1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0

→ Obje tablice također su valjane

$$A \underline{\vee} B = (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$$

1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0

U slučaju da postoje više od dva uvjeta, XOR (isključiva disjunkcija) je istinita ako je neparan broj uvjeta istinit, a neistinita ako je paran broj uvjeta istinit. Ova definicija je prilično česta u računarstvu, gdje XOR obično znači ostatak pri dijeljenju sa 2. XOR operacija je asocijativna $\Leftrightarrow A \underline{\vee} (B \underline{\vee} C) = (A \underline{\vee} B) \underline{\vee} C$.

Promotrimo to na tablici:

A	B	C	$A \underline{\vee} B \underline{\vee} C$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Primjer 4:

Pokušajmo zbrojiti neka dva broja, recimo 22 i 51.

$$22 = (10110)_2$$

$$51 = (110011)_2$$

Napišemo brojeve jedan ispod drugog:

$$\begin{array}{r} 22 = 10110_2 \\ 51 = \underline{110011}_2 \\ \text{nim-suma} = 100101_2 \end{array}$$

To znači da je $22 + 51 = 37$, što je naravno krivo, ali do toga je došlo jer smo zbrajali bez ostatka, nismo ostatak prenosili u sljedeći red.

Nim-suma je vrlo slična običnom zbrajanju, ali kakve veze ima s igrom Nim? Odgovor na ovo pitanje sadržan je u sljedećem teoremu C. L. Boutona

2.3 Teoremi i dokazi

Teorem 1. Pozicija (x_1, x_2, x_3) u Nim-u je P-pozicija ako i samo ako je nim-suma svih komponenti nula, tj. $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Primjer 5:

Promotrimo poziciju $(x_1, x_2, x_3) = (13, 12, 8)$. Je li to P-pozicija? Ako nije, kako ćemo doći u P-poziciju?

Prvo napišemo brojeve jedan ispod drugog u binarnom obliku:

$$\begin{array}{r} 13 = 1101_2 \\ 12 = 1100_2 \\ \underline{8 = 1000_2} \\ \text{nim-suma} = 1001_2 \end{array}$$

S obzirom da nim-suma nije 0, ovo je N-pozicija. Moramo pronaći potez koji vodi u P-poziciju, odnosno, u poziciju sa parnim brojem jedinica u svakom stupcu. Jedan od takvih poteza je da iz prvog reda maknemo 9 žetona. Dobivena pozicija je P-pozicija jer je nim-suma jednaka nuli.

$$\begin{array}{r} 4 = 100_2 \\ 12 = 1100_2 \\ \underline{8 = 1000_2} \\ \text{nim-suma} = 0000_2 \end{array}$$

Nim sa više redova

Vidjeli smo da je Nim sa jednim redom žetona trivijalan, a sa dva reda vrlo jednostavan. Nim sa tri reda puno je složeniji, pa bismo tako mogli očekivati da će Nim sa četiri reda biti još teži i kompliciraniji, međutim, to nije slučaj. Teorem 1 također vrijedi i za veći broj redova! Pozicija (x_1, x_2, x_3, x_4) je P-pozicija ako i samo ako je $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Ovo vrijedi za proizvoljno velik broj redova.

Dokaz teorema

Označimo sve pozicije kojima je nim-suma nula sa Π , a N neka budu sve pozicije kojima je nim-suma pozitivna. Provjerimo vrijede li sva tri uvjeta koja smo definirali u odlomku 1.2 :

- ➡ Sve krajnje pozicije su P-pozicije
- ➡ Iz svake N-pozicije postoji barem jedan potez koji vodi u P-poziciju
- ➡ Iz svake P-pozicije, svaki potez vodi u N-poziciju

(1) Sve krajnje pozicije su u skupu Π .

Jedina krajnja pozicija je pozicija sa nula žetona, prema tome $0 + 0 + \dots = 0$.

(2) Iz svake pozicije u skupu N , postoji potez koji vodi u poziciju iz skupa Π .

Prvo napišemo brojeve u binarnom obliku jedan ispod drugog. Promijenimo brojeve koji imaju jedinice u stupcima sa neparnim brojem jedinica tako da bude paran broj jedinica u svakom stupcu. Brojeve smo mogli promijeniti jedino tako da ih smanjimo, odnosno da na mjesto jedinica koje su viška stavimo nulu. Prema tome, to je valjani potez u poziciju skupa Π .

(3) Svaki potez iz pozicije u skupu Π vodi u poziciju skupa N .

Ako je pozicija (x_1, x_2, \dots) u skupu Π , i x_1 je promijenjen u x_1' , $x_1' < x_1$, onda ne možemo imati $x_1 + x_2 + \dots = 0 = x_1' + x_2 + \dots$, jer bi to značilo da je $x_1' = x_1$.

Znači, $x_1' + x_2 + \dots \neq 0$, sugerirajući nam da je (x_1', x_2, \dots) dio skupa N .

Ova tri svojstva pokazuju da je Π skup P-pozicija, odnosno da su P-pozicije one pozicije kojima je nim-suma jednaka nuli (pobjedničke pozicije).

Zanimljivo je uočiti iz (2) da je broj mogućih poteza iz N u P-poziciju jednak broju jedinica u prvom lijevom stupcu sa neparnim brojem jedinica. Općenito, uvijek postoji neparan broj poteza koji vode iz N u P-poziciju.

Primjer 6:

Je li početna pozicija (3, 4, 5, 6) pobjednička ili gubitnička? U slučaju da je gubitnička, koliko različitih načina postoji za dolazak u neku od pobjedničkih pozicija?



$$\begin{aligned} 3 &= 11_2 \\ 4 &= 100_2 \\ 5 &= 101_2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \underline{6 = 110_2} \\ \text{nim-suma} = 100_2 \end{array}$$

Početna pozicija je, kao što vidimo, N-pozicija, i postoje 3 različita poteza u neku P-poziciju (u prvom lijevom neparnom stupcu nalaze se tri jedinice).
Koji su to potezi?

✱ možemo maknuti cijeli drugi red

$$\begin{array}{r} 3 = 11_2 \\ 5 = 101_2 \\ \underline{6 = 110_2} \\ \text{nim-suma} = 000_2 \end{array}$$

✱ možemo iz trećeg reda uzeti 4 žetona

$$\begin{array}{r} 3 = 11_2 \\ 4 = 100_2 \\ 1 = 1_2 \\ \underline{6 = 110_2} \\ \text{nim-suma} = 000_2 \end{array}$$

✱ možemo iz četvrtog reda uzeti 4 žetona

$$\begin{array}{r} 3 = 11_2 \\ 4 = 100_2 \\ 5 = 101_2 \\ \underline{2 = 10_2} \\ \text{nim-suma} = 000_2 \end{array}$$

Ovo su sve pobjedničke pozicije za verziju (3, 4, 5, 6)

(0,0,0,0)	(0,0,1,1)	(0,0,2,2)	(0,0,3,3)	(0,0,4,4)	(0,0,5,5)
(0,1,0,1)	(0,1,1,0)	(0,1,2,3)	(0,1,3,2)	(0,1,4,5)	(0,1,5,4)
(0,2,0,2)	(0,2,1,3)	(0,2,2,0)	(0,2,3,1)	(0,2,4,6)	(0,3,0,3)
(0,3,1,2)	(0,3,2,1)	(0,3,3,0)	(0,3,5,6)	(0,4,0,4)	(0,4,1,5)
(0,4,2,6)	(0,4,4,0)	(0,4,5,1)	(1,0,0,1)	(1,0,1,0)	(1,0,2,3)
(1,0,3,2)	(1,0,4,5)	(1,0,5,4)	(1,1,0,0)	(1,1,1,1)	(1,1,2,2)
(1,1,3,3)	(1,1,4,4)	(1,1,5,5)	(1,2,0,3)	(1,2,1,2)	(1,2,2,1)
(1,2,3,0)	(1,2,5,6)	(1,3,0,2)	(1,3,1,3)	(1,3,2,0)	(1,3,3,1)
(1,3,4,6)	(1,4,0,5)	(1,4,1,4)	(1,4,3,6)	(1,4,4,1)	(1,4,5,0)
(2,0,0,2)	(2,0,1,3)	(2,0,2,0)	(2,0,3,1)	(2,0,4,6)	(2,1,0,3)
(2,1,1,2)	(2,1,2,1)	(2,1,3,0)	(2,1,5,6)	(2,2,0,0)	(2,2,1,1)
(2,2,2,2)	(2,2,3,3)	(2,2,4,4)	(2,2,5,5)	(2,3,0,1)	(2,3,1,0)
(2,3,2,3)	(2,3,3,2)	(2,3,4,5)	(2,3,5,4)	(2,4,0,6)	(2,4,2,4)
(2,4,3,5)	(2,4,4,2)	(2,4,5,3)	(3,0,0,3)	(3,0,1,2)	(3,0,2,1)
(3,0,3,0)	(3,0,5,6)	(3,1,0,2)	(3,1,1,3)	(3,1,2,0)	(3,1,3,1)
(3,1,4,6)	(3,2,0,1)	(3,2,1,0)	(3,2,2,3)	(3,2,3,2)	(3,2,4,5)
(3,2,5,4)	(3,3,0,0)	(3,3,1,1)	(3,3,2,2)	(3,3,3,3)	(3,3,4,4)
(3,3,5,5)	(3,4,1,6)	(3,4,2,5)	(3,4,3,4)	(3,4,4,3)	(3,4,5,2)

2.4 Misère Nim

Što će se dogoditi ako igramo igru Nim prema misère pravilu? Postoji li u tom slučaju nekakva pobjednička strategija i skup pobjedničkih pozicija? U slučaju da postoji, na koji način možemo doći do toga?

Ovo je Boutonova metoda za optimalnu igru misère Nim-a. Igramo kao što bi igrali i po normalnim pravilima sve dok postoje barem dva reda žetona veća od jedan. Kad se naš protivnik pomakne tako da postoji točno jedan red veći od jedan, smanjimo taj red na 0 ili 1 žeton, ovisno o tome što od toga ostavlja neparan broj redova sa jednim žetonom.. Ovo vrijedi zato jer, ako se pridržavamo pobjedničke strategije, nikad ne trebamo ostaviti točno jedan red žetona veći od jedan (uvijek iza sebe moramo ostaviti žetone čija je nim-suma 0), a naš protivnik ne može se pomaknuti sa dva reda žetona veća od jedan na nijedan red žetona veći od jedan; tako da naposljetku dolazimo do pozicije sa točno jednim redom žetona većim od jedan i mora biti naš red za igru.



Općenito je misère teorija puno kompliciranija od normalne teorije, međutim, to ovdje nije slučaj. Neke igre imaju prilično jednostavnu normalnu teoriju, ali izuzetno tešku misère teoriju, kao npr. Kayles.

Primjer 7:

Najbolje ćemo to vidjeti na primjeru. Recimo da smo svom protivniku ostavili poziciju (1, 2, 3).



$$\begin{array}{r}
 1 = 1_2 \\
 2 = 10_2 \\
 \underline{3 = 11_2} \\
 \text{nim-suma} = 00_2
 \end{array}$$

Ako on iz drugog reda uzme 1 žeton, imamo sljedeću situaciju:

$$\begin{array}{r}
 1 = 1_2 \\
 1 = 1_2 \\
 \underline{3 = 11_2} \\
 \text{nim-suma} = 11_2
 \end{array}$$

Dosli smo u poziciju gdje postoji točno jedan red žetona veći od 1. Sada taj red trebamo smanjiti za 2 žetona, tako da ostane neparan broj redova u kojima je samo jedan žeton.

$$\begin{array}{r} 1 = 1_2 \\ 1 = 1_2 \\ \underline{1 = 1_2} \\ \text{nim-suma} = 1_2 \end{array}$$

Sada smo protivniku ostavili neparan broj redova u kojima se nalazi samo po jedan žeton. Iz kojeg god reda on uzme žeton, mi ćemo uzeti opet iz nekog drugog reda i njemu će ostati zadnji žeton. Ovo je pobjednička pozicija iako ima nim-sumu 1. To je iznimka zato jer se radi o misère verziji igre.



Ako protivnik uzme 1 žeton iz prvog reda, nama će ostati pozicija (2, 3).

$$\begin{array}{l} 2 = 10_2 \\ \underline{3 = 11_2} \\ \text{nim-suma} = 11_2 \end{array}$$

Da bi opet došli u pobjedničku poziciju, iz drugog reda moramo uzeti 1 žeton.

$$\begin{array}{l} 2 = 10_2 \\ \underline{2 = 10_2} \\ \text{nim-suma} = 00_2 \end{array}$$

I sad, ako protivnik iz bilo kojeg reda uzme jedan žeton, mi ćemo uzeti cijeli red u kojem se nalaze 2 žetona i njemu će ostati zadnji žeton. Ako uzme cijeli jedan red, mi ćemo iz reda koji je ostao uzeti jedan žeton i njemu opet ostaviti zadnji žeton. Njegova reakcija biti će otprilike ovakva:



ili ovakva:



2.5 Varijacije na temu

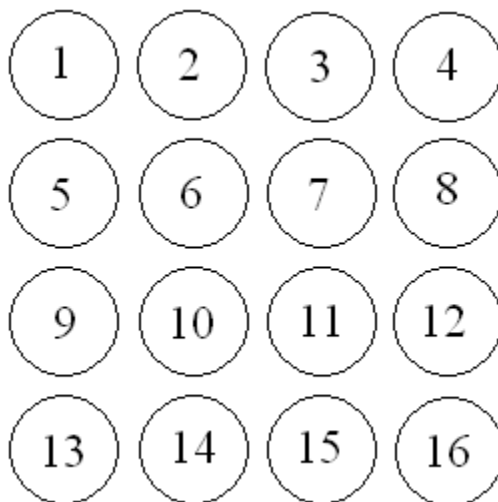
Među mnogim potpuno analiziranim varijacijama Nim-a, jedna od najzanimljivijih je ona matematičara E.H.Moore-a, koju je on nazvao Nim_k (*Nim indeks k*), s tim da je k neki prirodan broj, $k \in \mathbb{N}$.

Opis igre. Kao i u originalnom Nim-u, i ovdje postoje dva igrača A i B i skup bilo kakvih predmeta, recimo žetona. Igrač A uzima određeni broj žetona i te žetone raspoređuje u neki proizvoljan broj redova, označimo ga sa n , s time da broj žetona u svakom redu bude minimalno 1. Igrači naizmjenično uzimaju žetone iz tih redova, B uzima prvi, i igrač koji uzme zadnji žeton je pobjednik. U svakom potezu igrači mogu uzimati žetone iz više redova (u Nim-u je dozvoljeno uzimanje žetona iz samo jednog reda), jedino broj žetona koji uzmu ne smije preći dogovoreni broj k .

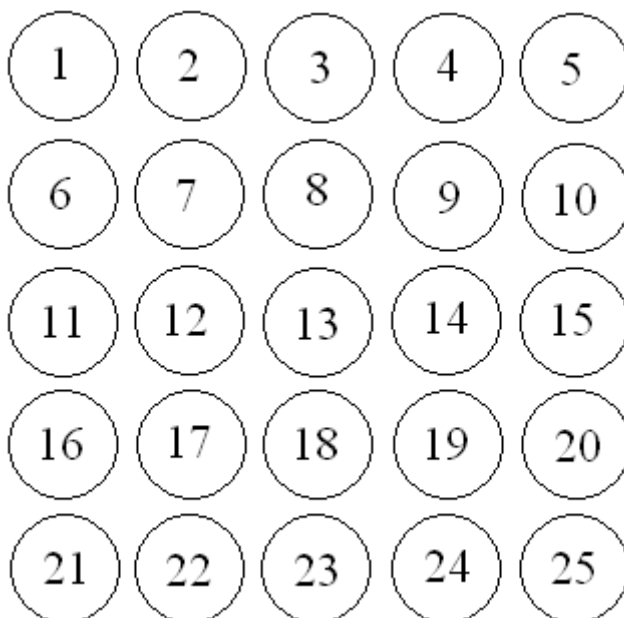
Matematička teorija igre Nim_k . Jasno je da, ako igrač A podijeli manje od $k+1$ žetona, B može jednostavno pobijediti u prvom potezu tako da uzme sve žetone. To je znači, nesigurna kombinacija. Dakle, ako A podijeli žetone i oni budu složeni tako da je to sigurna kombinacija, B ne može izbjeći da tu kombinaciju pretvori u nesigurnu, onda A opet ispravnim potezom može tu kombinaciju pretvoriti u sigurnu i tako sve dok B ne bude prisiljen smanjiti broj žetona ispod $k+1$, kada A pobjeđuje. S druge strane, ako A podijeli nesigurnu kombinaciju, B ju ispravnim potezom može pretvoriti u sigurnu i igra se nastavlja kao i u prethodnom slučaju, sve do pobjede igrača B.

Formula za sigurnu kombinaciju. Kombinacija je sigurna ako i samo ako je, kada napišemo brojeve žetona u svakom redu u binarnom obliku, zbroj jedinica u svakom stupcu djeljiv sa $(k+1)$.

Ostale varijacije po svemu do sad otkrivenom sudeći, nemaju neku jednostavnu strategiju za optimalnu igru. Od takvih, još neanaliziranih verzija, sigurno je najzanimljivija igra danskog matematičara iz Kopenhagena, Piet Hein-a, koja se u Danskoj naziva Bulo, a engleski prijevod je Tac Tix. U njegovoj verziji, žetoni su poredani u četverokutni oblik, kao na slici. Može biti paran ili neparan broj žetona u svakom redu. Možemo primjetiti da postoje neke sličnosti sa Matrix Nim-om.



Igrači naizmjenično uzimaju žetone i mogu ih uzimati iz bilo kojeg reda ili stupca, ali ne mogu uzimati žetone koji nisu jedan pored drugog. Znači, ako igrač A uzme žetone 5 i 9, igrač B ne može u jednom potezu uzeti žetone 1 i 13. Ako postoji neparan broj žetona na svakoj strani, prvi igrač može pobijediti tako da uzme srednji žeton i onda igra simetrično kao i njegov protivnik.



Recimo, igrač A uzme 13, igrač B uzme 1, 2, 3, igrač A uzme 21, 22, 23, B uzme 6, 7, 8, 9, 10, A uzme 16, 17, 18, 19, 20, B uzme 5, A uzme 25, B uzme 11, 12, A uzme 14, 15, B uzme 24 i A uzme 4.

Ako postoji paran broj žetona, drugi igrač može pobijediti tako da igra simetrično kao njegov protivnik od početka.

Igrač A uzme 4, 8, 12, 16, igrač B uzme 1, 5, 9, 13, A uzme 2, 3, B uzme 14, 15, A uzme 7, B uzme 10, A uzme 11 i B uzme 6.

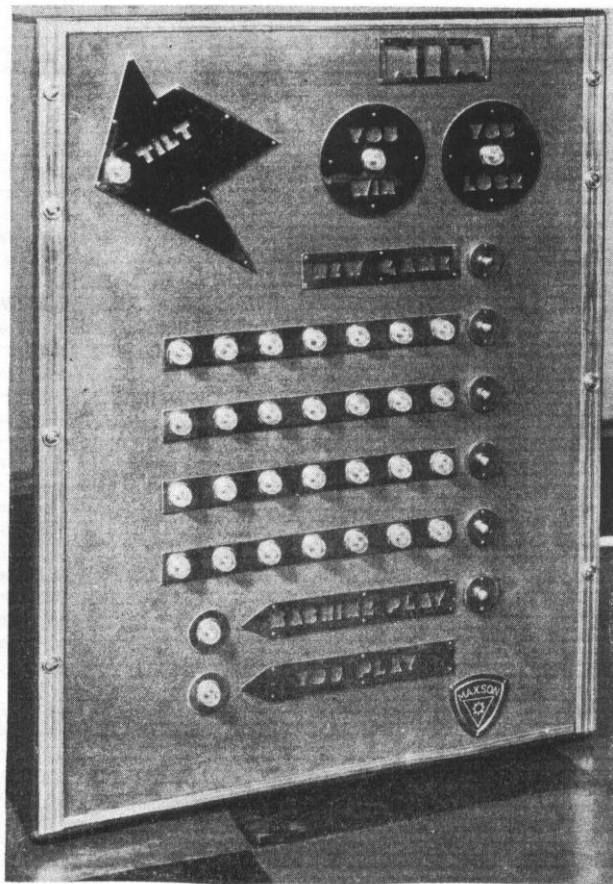
Igrati se također može tako da se žetoni slože u trokutasti ili šesterokutni ili neki drugi oblik. Dovoljno je teško analizirati osnovnu 4×4 verziju, a kako se povećava broj žetona, složenost igre eksponencijalno raste. Površna analiza pokazuje da ako se igra na prethodno opisan način, može se doći do pobjede. Nažalost, postoji mnogo slučajeva kad taj princip simetrije neće funkcionirati.

Možemo vidjeti da je igra puno složenija nego što izgleda na prvi pogled i da za sada ne postoji neka strategija koja bi nam osigurala pobjedu.

Budući da se rad računala temelji na binarnom sustavu, nije ga teško isprogramirati da igra Nim po pobjedničkoj strategiji, ili napraviti poseban stroj u tu svrhu. Edward U. Condon napravio je prvi takav stroj. Patentiran je 1940. pod imenom “Nimatron” i izložen na svjetskom sajmu u New Yorku. Nimatron je odigrao oko 100 000 partija i pobijedio njih 90 000. Većina njegovih poraza bile su demonstracije skeptičnim promatračima da se stroj ipak može pobijediti. 1941. Raymond M. Redheffer napravio je uvelike poboljšanu verziju Nimatrona. Originalni Nimatron težio je jednu tonu i za njegovu izgradnju korišteni su skupi releji, a poboljšani Nimatron imao je jedva tri kg i koristio samo četiri rotacijska prekidača. 1951. na sajmu u Berlinu predstavljen je robot koji je igrao Nim - Nimrod. Usput rečeno, to je bilo prvo računalo koje je ikad dospjelo na njemačko tlo. Prema članku A. M. Turing-a, *Faster than Thought*, robot je bio toliko popularan da su “gosti potpuno ignorirali stol na kojem je bila besplatna hrana i piće i bilo je potrebno pozvati osiguranje kako bi obuzdali gomilu. Stroj je postao još popularniji nakon što je pobijedio tadašnjeg ministra ekonomije dr. Erhard-a u čak tri partije”.



Njemački ministar ekonomije Ludwig Erhard igra Nim



Game-playing digital computer is a skillful and relentless opponent

Dvije verzije Nimatrona

The Nimatron

Prednja ploča stroja sadrži četiri reda u svakom od kojeg se nalazi 7 lampica. One predstavljaju žetone, čije micanje je izvršeno gašenjem lampica. Pored svakog reda nalazi se prekidač koji služi za micanje žetona, odnosno gašenje žarulja, i koliko puta pritisnemo prekidač, toliko će se žarulja ugasiti. Ako netko pokuša varati tako da ugasi lampice iz više redova, igra automatski završava. Kad igrač završi s potezom, upali se žaruljica pored natpisa "MACHINE PLAY" i kad igrač pritisne prekidač s druge strane tog natpisa, stroj automatski izabere red koji želi i ugasi odabrane žaruljice. Tada se upali žaruljica pored "YOU PLAY" i to je znak da je naš red za igru.

Ako stroj kreće od nesigurne pozicije, uvijek će ju pretvoriti u sigurnu poziciju, i to tako da će broj upaljenih lampica pretvoriti u binarni sustav i ugaziti određen broj lampica tako da zbroj jedinica po stupcima bude paran, odnosno djeljiv sa dva. Budući da čovjek sad mora doći u nesigurnu poziciju, stroj će konstantno održavati svoju prednost dok naposljetku ne upali žaruljicu "YOU LOSE".

U slučaju pak da stroj kreće od sigurne pozicije, nasumično će odabrati red i ugaziti u tom redu jednu lampicu, produžujući na taj način igru u nadi da će njegov protivnik pogriješiti. Cijeli proces u kojem stroj odlučuje što će napraviti i u kojem to ostvaruje traje manje od 0.4 sekunde. Ako čovjek uspije pobijediti, pali se žaruljica pored natpisa "YOU WIN".

Kad pritisnemo prekidač pored natpisa "NEW GAME", pali se "YOU PLAY" žaruljica. Početni raspored lampica određuje se sa stražnje strane stroja. Budući da čovjek mora napraviti prvi potez, početna sigurna pozicija znači siguran poraz za njega, a pobjedu za stroj. Ako je početna pozicija nesigurna, čovjek ima šansu pobijediti ukoliko se pridržava pobjedničke strategije.

Sigurnosni krugovi u stroju onemogućavaju neispravne ili nepoštene poteze, kao npr. izbjegavanje svog reda i prisiljavanje stroja na dva uzastopna poteza. Ako igrač pokuša ugaziti lampice u više redova, bez dopuštanja stroju da igra, tilt relej se aktivira, pali se "TILT" žaruljica koja gasi sva druga svjetla i označava kraj igre.

Nimatron je dizajniran prvenstveno kao demonstracija što sve računala mogu napraviti, a svrha mu je zabava i razbibriga.

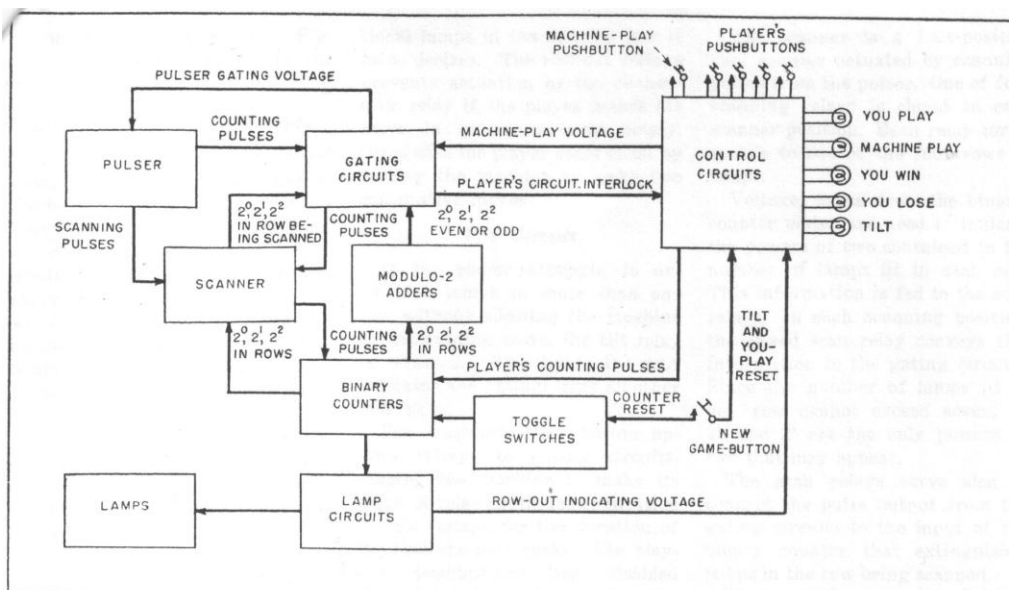


FIG. 1—Block diagram shows circuits that comprise the NIM machine's electronic brain

Shema Nimatrona

3. Dodaci

3.1 Igra Nim za računalo

Na priloženom CD-u nalazi se duhovito animirana igra Nim za računalo. Isprogramirana je za igru prema misère strategiji. Kako bi se olakšalo igraču, a usput mu i otežalo da shvati pobjedničku strategiju, igra je napravljena tako da računalo, ako igra prvo, od početne nesigurne pozicije NE napravi sigurnu poziciju. Tako igrač može pobijediti i ako igra prvi i ako igra drugi, a i neće uvidjeti da uvijek ako igra drugi izgubi (što bi se dogodilo da računalo od početka igra prema pobjedničkoj strategiji). Sve u svemu, igra je osmišljena i napravljena odlično i to je razlog što dolazi kao prilog maturlnoj radnji.

3.2 Film *Prošle godine u Marienbadu*

U velikom, luksuznom, staromodnom hotelu, stranac pokušava nagovoriti udanu ženu da pobjegne s njim, ali čini se da se ona ne uspijeva prisjetiti njihove romanse koja se dogodila (ili nije?) prošle godine u Marienbadu.

3.3 Čitač misli

Na internet adresi <http://www.zafrkancije.co.yu/zezalice/mindreader.htm> nalazi se „čitač misli“. Treba zamisliti dvoznamenkasti broj i od njega oduzeti zbroj njegovih znamenki. Računalo zatim pogodi znak koji se nalazi pored dobivenog broja. Trik izgleda neobjašnjiv, ali kad se malo bolje pogleda zapravo se radi u najelementarnijoj matematici. Stvar je u tome da ako se od dvoznamenkastog broja oduzmu znamenke dobiva se:

10 - 19 ⇔ 9
20 - 29 ⇔ 18
30 - 39 ⇔ 27
40 - 49 ⇔ 36
50 - 59 ⇔ 45
60 - 69 ⇔ 54
70 - 79 ⇔ 63
80 - 89 ⇔ 72
90 - 99 ⇔ 81

Znači, možemo izabrati samo višekratnike broja 9, a svi oni imaju isti simbol koji se svaki put promijeni.

4. Zaključak

Vidjeli smo da postoje pobjedničke strategije koje nisu iste za svaku igru. Osim igre Nim postoje razne matematičke igre koje ovdje nismo obradili, na primjer Northcott's Game, The Coin Strip Game, Stop-Gate (Domineering), Connect Four, The Game of Col, Hackenbush, Kayles, a od kompliciranijih najpoznatiji je šah. Većina njih ima neku svoju teoriju i strategiju, ali postoje i neke koje su prekomplicirane i za njih ne postoji nikakva strategija, jer ne postoji računalo koje bi obradilo i usporedilo sve pozicije, jer ih postoji beskonačno mnogo. Također, za pojedine igre, pobjedničke strategije još nisu niti otkrivene a vjerojatno postoje. Možda neka nadolazeća generacija matematičara uspije riješiti neke probleme koji se danas čine nerješivima.

Matematičke igre sa jednostavnom pobjedničkom strategijom vrlo zanimljive i svatko tko jednom otkrije tu strategiju lako će pobijediti svakoga tko nije s njom upoznat.

5. Zahvale

Zahvaljujem se svima koji su na bilo koji način nesebičnom pomoći i korisnim savjetima doprinjeli izradi ove radnje. Najzaslužniji slijede abecednim redom:
XXXXX XXXX, XXXXX XXXX, XXXXX XXXX, XXXXX XXXX , XXXXX XXXX.

Hvala i svima drugima koji se nisu našli na popisu, a dijele zasluge gore navedenih.

6. Popis literature

1. Charles Leonard Bouton
"Nim, a game with complete mathematical theory"
Annals of mathematics, Series 2, Vol. 3, pp. 35-39 (1902).
- 2.S. H. Moore
"A Generalization of the Game called Nim"
Annals of Mathematics 11, ser.2 (1910.): 93-94
- 3.E. U. Condon
"The Nimatron"
American Mathematical Monthly 49 (May 1942.): 330-32
- 4.Raymond Redheffer
"A machine for playing the game Nim"
American Mathematical Monthly 55 (June-July 1948): 343-50
- 5.Herbert Koppel
"Didital Computer Plays Nim"
Electronics, November 1952.
- 6.D. P. McIntyre
"A new system for playing the game Nim"
American Mathematical Monthly 49 (1942.): 44-46
- 7.John C. Holladay
"Matrix Nim"
American Mathematical Monthly 65 (February 1958.): 107-9

<http://www.cut-the-knot.org/ctk/May2001.shtml>

<http://mathworld.wolfram.com/XOR.html>

<http://www.imageviewer.co.uk/java/nim/>

<http://ite.pubs.informs.org/Vol3No3/ChlondAkyol/index.php>

<http://home.att.net/~numericana/answer/games.htm#nim>

<http://www.transience.com.au/pearl3.html>

<http://www.math.hr/~mathe/teorijaigara/index.html>



BESPLATNI GOTOVI SEMINARSKI, DIPLOMSKI I MATURSKI RAD.

**RADOVI IZ SVIH OBLASTI, POWERPOINT PREZENTACIJE I DRUGI EDUKATIVNI
MATERIJALI.**



WWW.SEMINARSKIRAD.ORG

WWW.MATURSKIRADOVI.NET

WWW.MATURSKI.NET

WWW.SEMINARSKIRAD.INFO

WWW.MATURSKI.ORG

WWW.ESSAYSX.COM

WWW.FACEBOOK.COM/DIPLOMSKIRADOVI

NA NAŠIM SAJTOVIMA MOŽETE PRONAĆI SVE, BILO DA JE TO **[SEMINARSKI](#)**, **[DIPLOMSKI](#)** ILI **[MATURSKI](#)** RAD, POWERPOINT PREZENTACIJA I DRUGI EDUKATIVNI MATERIJAL. ZA RAZLIKU OD OSTALIH MI VAM PRUŽAMO DA POGLEDATE SVAKI RAD, NJEGOV SADRŽAJ I PRVE TRI STRANE TAKO DA MOŽETE TAČNO DA ODABERETE ONO ŠTO VAM U POTPUNOSTI ODGOVARA. U BAZI SE NALAZE **[GOTOVI SEMINARSKI, DIPLOMSKI I MATURSKI RADOVI](#)** KOJE MOŽETE SKINUTI I UZ NJIHOVU POMOĆ NAPRAVITI JEDINSTVEN I UNIKATAN RAD. AKO U **[BAZI](#)** NE NAĐETE RAD KOJI VAM JE POTREBAN, U SVAKOM MOMENTU MOŽETE NARUČITI DA VAM SE IZRADI NOVI, UNIKATAN SEMINARSKI ILI NEKI DRUGI RAD RAD NA LINKU **[IZRADA RADOVA](#)**. PITANJA I ODGOVORE MOŽETE DOBITI NA NAŠEM **[FORUMU](#)** ILI NA **MATURSKIRADOVI.NET@GMAIL.COM**