

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Preddiplomski studij matematike

Osnovni teoremi diferencijalnog računa

Završni rad

Osijek, 2009.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Preddiplomski studij matematike

Osnovni teoremi diferencijalnog računa

Završni rad

Voditelj: Prof. dr. sc. XXXXX XXXXX

Osijek, 2009.

Sadržaj

1. UVOD	1
2. FERMATOV TEOREM	2
3. ROLLEOV TEOREM	5
4. LAGRANGEOV TEOREM	7
5. CAUCHYJEV TEOREM	13
6. TAYLOROV TEOREM	15
7. LITERATURA	21

Sažetak. Diferencijalni račun ima važnu ulogu u razvoju praktične primjene matematičke analize. U ovom radu je obrađeno pet osnovnih teorema diferencijalnog računa: Fermatov, Rolleov, Lagrangeov, Cauchyjev i Taylorov. Uz svaki teorem je iskazan dokaz.

Ključne riječi: lokalni ekstrem, lokalni minimum, lokalni maksimum, neprekidna funkcija, derivabilnost, stacionarna točka, točka infleksije, tangenta, sekanta, koeficijent smjera, polinom, Taylorov red.

Abstract. Differential calculus has a significant role in the development of practical use of mathematical analysis. This paper deals with basic theorems of differential calculus. There are five basic theorems: Fermat's, Roll's, Lagrange's, Cauchy's and Taylor's theorem. Each theorem is presented with an appropriate proof.

Key words: local extremum, local maximum, local minimum, continuous function, differentiability, stationary point, inflection point, tangent, secant, direction number, polynomials, Taylor series.

1. UVOD

Teoremi koje ćemo navesti u ovom radu su osnovni teoremi na kojima je bazirana primjena diferencijalnog računa. Prvi teorem koji uvodimo je Fermatov teorem, također poznat kao i nužan uvjet za postojanje lokalnog ekstrema derivabilne funkcije. Zatim prelazimo na Rolleov teorem koji daje uvjete uz koje postoji kritična točka funkcije.

Kao posljedice Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti dokazujemo korolare koji pomažu pri određivanju lokalnih ekstrema i intervala monotonosti funkcije. Slijedi Cauchyjev teorem kao poopćenje Lagrangeovog teorema.

U posljednjem poglavlju dokazujemo Taylorov teorem. Taylorov teorem ima široku primjenu: pri aproksimaciji funkcije polinomom uz određenu pogrešku aproksimacije, kod određivanja lokalnih ekstrema funkcije, pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi, te mnoge druge.

Uz svaki teorem navedeni su primjeri zadataka, te pojedine primjene.

2. FERMATOV TEOREM

Radi boljeg razumijevanja sljedećeg teorema definirat ćemo pojam lokalnog ekstrema.

Definicija 2.1 Funkcija $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ postiže lokalni maksimum u točki $x_0 \in (a, b)$ ako postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a, b)$ vrijedi $f(x) \leq f(x_0)$, odnosno

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

Funkcija f u točki $x_0 \in (a, b)$ postiže lokalni minimum ako postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a, b)$ vrijedi $f(x) \geq f(x_0)$, odnosno

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(x_0).$$

Teorem 2.1 (Fermatov teorem) Neka funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in (a, b)$ ima lokalni ekstrem. Ako je funkcija f derivabilna u točki x_0 , onda je $f'(x_0) = 0$.

Dokaz. Pretpostavimo da funkcija f postiže lokalni minimum u točki $x_0 \in (a, b)$. Prema Definiciji 2.1 postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ vrijedi

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Kako je $x_0 \in (a, b)$, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je δ dovoljno malen tako da vrijedi $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$. Neka je $\Delta x \in (-\delta, \delta)$. Tada vrijedi

$$f(x_0) \leq f(x_0 + \Delta x),$$

odnosno

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0 \tag{1}$$

Funkcija f je derivabilna u x_0 , pa prema definiciji derivabilnosti (vidi [4, str.127]) vrijedi

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Također vrijedi

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Neka je $\Delta x \in (-\delta, 0)$. Tada iz (1) dobivamo nejednakost

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0,$$

pa je

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0. \tag{2}$$

Neka je sada $\Delta x \in (0, \delta)$. Tada iz (1) dobivamo nejednakost

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0,$$

pa je

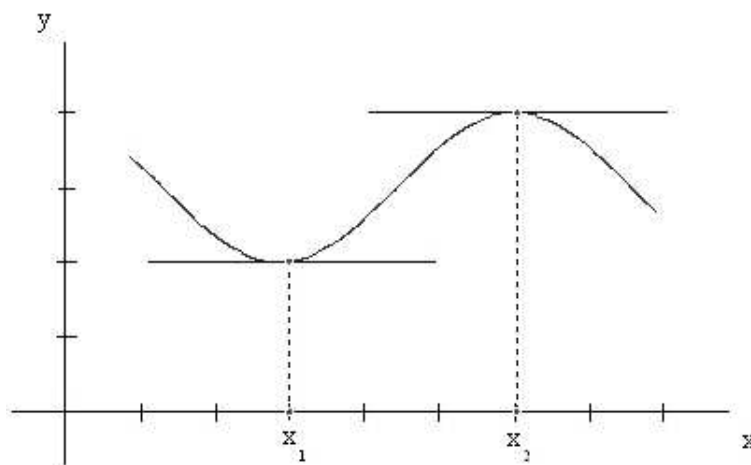
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0. \quad (3)$$

Kako je $f'(x) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, iz (2) i (3) slijedi

$$f'(x_0) = 0.$$

Time je teorem dokazan. □

Primjedba 2.1 (Geometrijska interpretacija Fermatovog teorema) Graf funkcije f koja zadovoljava uvjete Fermatovog teorema, u točki lokalnog ekstrema ima tangentu paralelnu s osi x , odnosno koeficijent smjera tangente jednak je nuli (vidi Sliku 1).



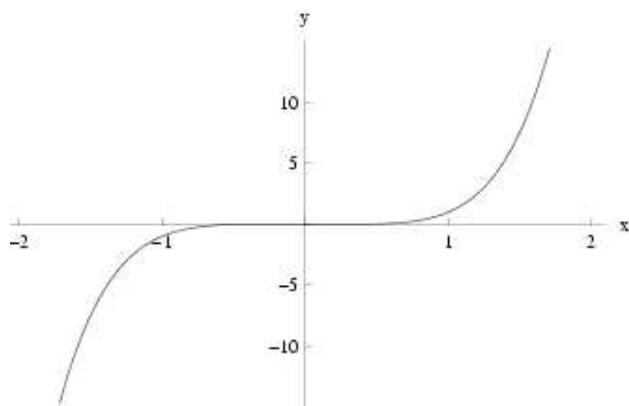
Slika 1: Geometrijska interpretacija Fermatovog teorema

Definicija 2.2 Neka je funkcija $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilna u točki x_0 . Kažemo da je $x_0 \in (a, b)$ kritična (ili stacionarna) točka onda ako je $f'(x_0) = 0$.

Primjedba 2.2 Fermatov teorem daje nužne uvjete za egzistenciju lokalnog ekstrema derivabilne funkcije. Odnosno, ako derivabilna funkcija f ima lokalni ekstrem u točki x_0 , onda je x_0 kritična točka funkcije f . Obrat, međutim, ne vrijedi. Pogledajmo na sljedećem primjeru.

Primjer 2.1 Provjerimo da li vrijedi obrat Fermatovog teorema za funkciju $f(x) = x^5$ na segmentu $[-2, 2]$ (vidi Sliku 2).

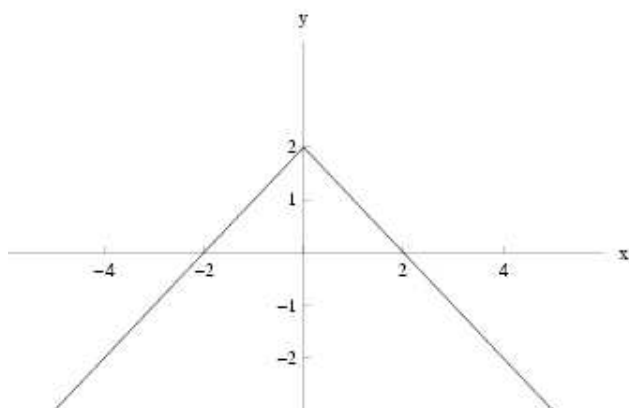
Funkcija f je derivabilna, te je $f'(x_0) = 0$, gdje je $x_0 = 0$. Međutim, funkcija f u točki x_0 nema lokalni ekstrem, već točku infleksije (vidi [4, str. 35]). Dakle, obrat Fermatovog teorema ne vrijedi.



Slika 2: Graf funkcije $f(x) = x^5$

Primjer 2.2 *Provjerimo da li su ispunjeni uvjeti Fermatovog teorema za funkciju $f(x) = 2 - |x|$ na segmentu $[-4, 4]$ (vidi Sliku 3).*

Funkcija f postiže lokalni maksimum u točki $x_0 = 0$, ali u toj točki funkcija f nije derivabilna. Dakle, nisu ispunjeni uvjeti Fermatovog teorema.



Slika 3: Graf funkcije $f(x) = 2 - |x|$

3. ROLLEOV TEOREM

Teorem 3.1 (Rolleov teorem) *Neka je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a, b]$ i derivabilna na intervalu (a, b) . Ako je $f(a) = f(b) = 0$ onda postoji točka $x_0 \in (a, b)$ takva da je $f'(x_0) = 0$.*

Sljedeći teorem će nam pomoći pri dokazu Rolleovog teorema (vidi [6, str. 350]).

Teorem 3.2 (Bolzano-Weierstrassov teorem) *Neka je $[a, b]$ segment realnih brojeva i $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na $[a, b]$. Ako funkcija f nije konstanta, onda je $f([a, b]) = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ segment u $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Promotrimo sljedeća dva slučaja.

(a) Neka je funkcija f konstanta na $[a, b]$. Tada možemo izabrati bilo koju točku $x_0 \in (a, b)$ takvu da je

$$f'(x_0) = 0.$$

Time je dokazan teorem u ovom slučaju.

(b) Promotrimo slučaj kada funkcija f nije konstanta. Kako je f neprekidna na $[a, b]$, prema Teoremu 3.2 vrijedi da je skup $f([a, b]) = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ također segment. Neka je $f([a, b]) = [A, B]$. Prema pretpostavci je $0 = f(a) = f(b) \in [A, B]$, pa je

$$A \leq 0 \leq B.$$

Ako je

$$A = B \quad \text{onda je} \quad A = B = 0,$$

pa je $f(x) = 0$ za svaki $x \in [a, b]$. Tada za svaki $x_0 \in (a, b)$ vrijedi $f'(x_0) = 0$, pa je funkcija f konstanta što je kontradikcija s pretpostavkom. Dakle, barem jedan od brojeva A, B je različit od nule.

Ako je

$$A < B \quad \text{i} \quad B > 0,$$

onda postoji točka x_0 segmenta $[a, b]$ u kojoj f poprima globalni maksimum B . Iz

$$f(x_0) = B > 0 \quad \text{i} \quad f(a) = f(b) = 0$$

slijedi da je $x_0 \in (a, b)$. Prema Teoremu 2.1 je $f'(x_0) = 0$.

Ako je

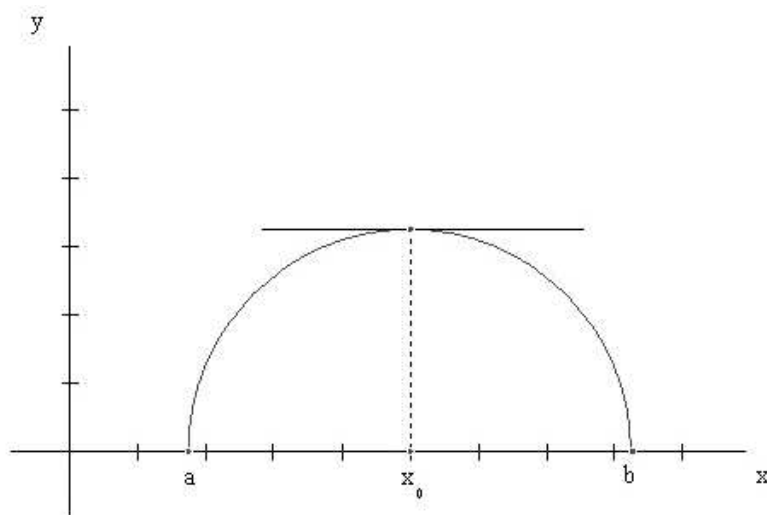
$$A < B \quad \text{i} \quad B = 0,$$

onda postoji točka x_0 segmenta $[a, b]$ u kojoj f poprima lokalni minimum A . Iz

$$f(x_0) = A < 0 \quad \text{i} \quad f(a) = f(b) = 0$$

slijedi da je $x_0 \in (a, b)$. Prema Teoremu 2.1 je $f'(x_0) = 0$. Time je teorem dokazan. $\square$

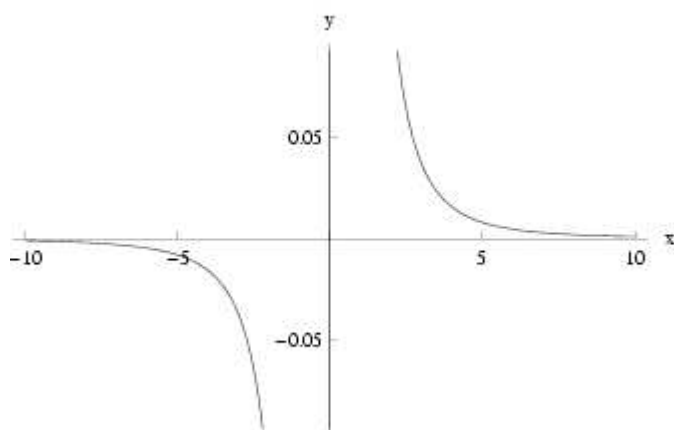
Primjedba 3.1 (Geometrijska interpretacija Rolleovog teorema) *Neka graf derivabilne i neprekidne funkcije f , koji siječe os x u rubovima a i b , ima tangentu u svakoj međutočki od a do b . Tada postoji točka x_0 u kojoj je tangenta paralelna s osi x (vidi Sliku 4).*



Slika 4: Geometrijska interpretacija Rolleovog teorema

Primjer 3.1 *Provjerimo da li su ispunjeni uvjeti Rolleovog teorema za funkciju $f(x) = \frac{1}{x^3}$ na intervalu $[-7, 7]$ (vidi Sliku 5).*

Kao što je vidljivo na samoj slici, funkcija f ima prekid u točki $x = 0$ u kojoj nije definirana. Dakle, uvjet neprekidnosti nije ispunjen, pa nisu ispunjeni uvjeti Rolleovog teorema.



Slika 5: Graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x^3}$

4. LAGRANGEOV TEOREM

Teorem 4.1 (Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti) *Neka je zadana funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ koja je neprekidna na segmentu $[a, b]$ i derivabilna na intervalu (a, b) . Tada postoji barem jedna točka $x_0 \in (a, b)$ takva da je*

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a). \quad (4)$$

Jednakost (4) iz Teorema 4.1 može se zapisati u obliku

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$

Dokaz. Neka je zadan pravac y kroz točke $T_1(a, f(a))$ i $T_2(b, f(b))$ (vidi Sliku 6) definiran formulom

$$y(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Neka je funkcija g na segmentu $[a, b]$ definirana formulom

$$g(x) = f(x) - y(x),$$

odnosno

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Deriviranjem po varijabli x dobivamo

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

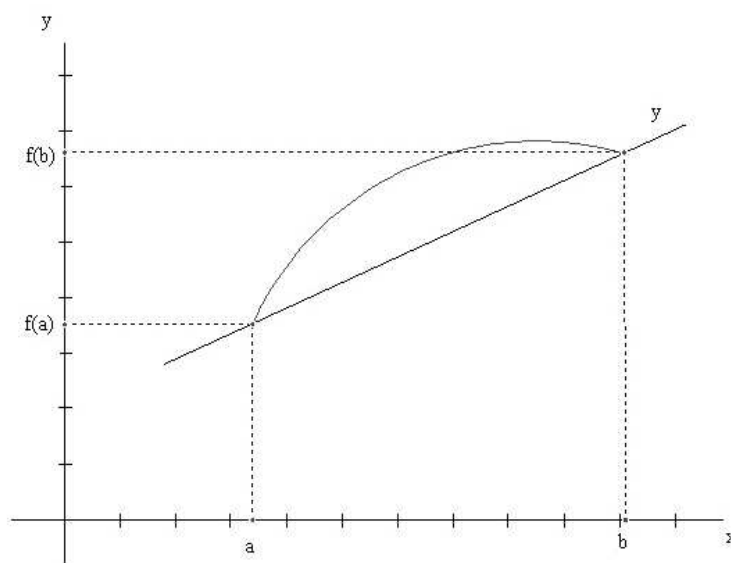
Funkcija g ispunjava sve uvjete Teorema 3.1, pa postoji točka $x_0 \in (a, b)$ takva da je $g'(x_0) = 0$, odnosno

$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

što povlači

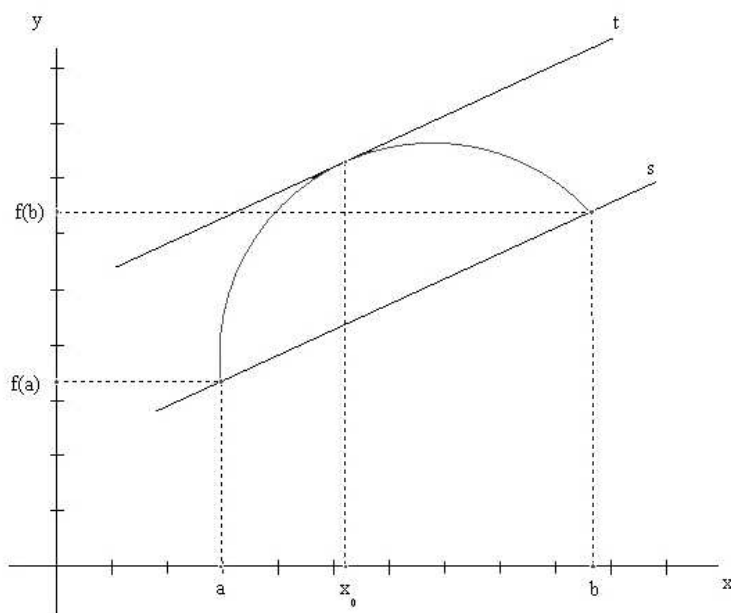
$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

Time je teorem dokazan. □



Slika 6

Primjedba 4.1 (Geometrijska interpretacija Lagrangeovog teorema) *Neka je zadana sekanta s funkcije f određena točkama $T_1(a, f(a))$ i $T_2(b, f(b))$. Tada postoji točka $x_0 \in (a, b)$ u kojoj će tangenta na graf funkcije f bit paralelna sa sekantom s (vidi Sliku 7). Koeficijenti smjerova sekante i tangente su jednaki.*



Slika 7: Geometrijska interpretacija Lagrangeovog teorema

Primjer 4.1 *Provjerimo da li su ispunjeni uvjeti Lagrangeovog teorema za funkciju $f(x) = x^3 - x$ definiranu na segmentu $[-2, 1]$ (vidi Sliku 8).*

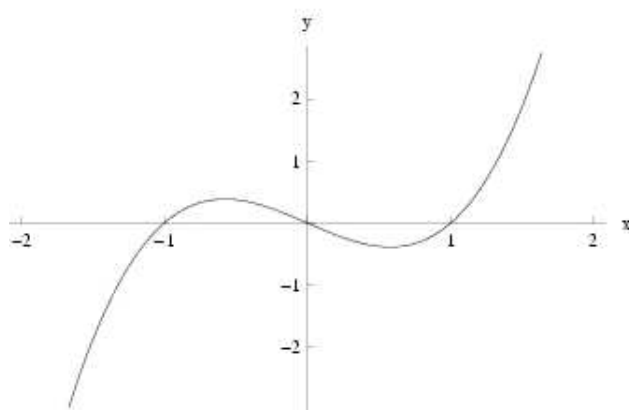
Funkcija f je neprekidna na segment $[-2, 1]$ i derivabilna na intervalu $(-2, 1)$, pri čemu je

$$f'(x) = 3x^2 - 1.$$

Dakle, ispunjeni su uvjeti Lagrangeovog teorema, pa možemo naći točku $x_0 \in (-2, 1)$ za koju vrijedi

$$f(1) - f(-2) = f'(x_0)(1 + 2).$$

Budući da je $f(-2) = -1$ i $f(1) = 0$, dobivamo da je $x_0 = 1$ ili $x_0 = -1$. Kako je $x_0 \in (-2, 1)$ slijedi da je $x_0 = -1$.



Slika 8: Graf funkcije $f(x) = x^3 - x$

Korolar 4.1 *Neka je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a, b]$ i derivabilna na intervalu (a, b) . Ako je $f'(x) = 0$ za svaki $x \in (a, b)$, onda je funkcija f konstanta.*

Dokaz. Izaberimo proizvoljan broj $x \in (a, b)$. Očito vrijedi $(a, x) \subset (a, b)$, što povlači da je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, x]$ i derivabilna na intervalu (a, x) . Tada prema Teoremu 4.1 postoji točka $x_0 \in (a, x)$ takva da je

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(x_0). \quad (5)$$

Prema pretpostvci je $f'(x) = 0$ za svaki $x \in (a, b)$, pa je i $f'(x_0) = 0$ za $x_0 \in (a, x)$. Tada iz (5) slijedi

$$f(x) - f(a) = f'(x_0)(x - a) = 0 \cdot (x - a) = 0,$$

pa je

$$f(x) = f(a).$$

Dakle, funkcija f je konstanta. Time je korolar dokazan. □

Primjedba 4.2 Funkciju $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nazivamo primitivnom funkcijom funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ako vrijedi:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{za svaki } x \in [a, b].$$

Korolar 4.2 Neka su funkcije $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidne na $[a, b]$ i derivabilne na (a, b) , te neka vrijedi $f'(x) = g'(x)$ za svaki $x \in (a, b)$. Tada postoji konstanta c takva da je

$$f(x) = g(x) + c \quad \text{za svaki } x \in [a, b].$$

Dokaz. Neka je funkcija $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definirana

$$F(x) = f(x) - g(x) \quad \text{za svaki } x \in [a, b]. \quad (6)$$

Deriviranjem dobijemo

$$F'(x) = f'(x) - g'(x).$$

Prema pretpostavci je $f'(x) = g'(x)$ za svaki $x \in (a, b)$, pa je

$$F'(x) = 0 \quad \text{za svaki } x \in (a, b).$$

Prema Korolaru 4.1 funkcija F je konstanta, odnosno postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je

$$F(x) = c \quad \text{za svaki } x \in [a, b].$$

Odnosno, prema formuli (6) slijedi

$$f(x) - g(x) = c \quad \text{za svaki } x \in [a, b],$$

što povlači

$$f(x) = g(x) + c \quad \text{za svaki } x \in [a, b].$$

Time je korolar dokazan. □

Primjedba 4.3 Neka su $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bilo koje dvije primitivne funkcije od funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, te neka je c bilo koja konstanta. Tada se funkcije F i G razlikuju za konstantu c , tj.

$$F(x) = G(x) + c \quad \text{za svaki } x \in [a, b].$$

Korolar 4.3 Neka je zadana funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ koja je neprekidna na $[a, b]$ i derivabilna na (a, b) . Tada

(a) funkcija f pada [strogo pada] na $[a, b]$ onda i samo onda ako $f'(x) \leq 0$ za svaki $x \in (a, b)$ [ako $f'(x) < 0$ za svaki $x \in (a, b)$]

(b) funkcija f raste [strogo raste] na $[a, b]$ onda i samo onda ako $f'(x) \geq 0$ za svaki $x \in (a, b)$ [ako $f'(x) > 0$ za svaki $x \in (a, b)$].

Dokaz. Dokažimo slučaj pod (a) tj. da funkcija f pada na $[a, b]$ onda i samo onda ako $f'(x) \leq 0$ za svaki $x \in (a, b)$.

1. Pretpostavimo da funkcija pada na $[a, b]$. Neka je $x_0 \in (a, b)$ proizvoljna točka. Treba pokazati da je $f'(x) \leq 0$ za svaki $x \in (a, b)$. Neka je Δx takav da $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x) \subset (a, b)$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) &\leq f(x_0) \quad \text{za} \quad \Delta x > 0, \\ f(x_0 + \Delta x) &\geq f(x_0) \quad \text{za} \quad \Delta x < 0. \end{aligned}$$

Promotrimo sljedeći kvocijent

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &\leq 0 \quad \text{za} \quad \Delta x > 0, \\ \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &\leq 0 \quad \text{za} \quad \Delta x < 0. \end{aligned}$$

Dakle, bez obzira na Δx , vrijednost kvocijenta se ne mijenja. Tada prema definiciji derivacije funkcije f u točki x_0 (vidi [4, str. 127]) vrijedi

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

Time je dokazan prvi smjer.

2. Dokažimo sad obrat. Pretpostavimo da vrijedi $f'(x) \leq 0$ za svaki $x \in (a, b)$. Neka su $x_1, x_2 \in [a, b]$ takvi da $x_1 < x_2$. Prema Teoremu 4.1 postoji točka $x_0 \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ takva da vrijedi

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_0).$$

Prema pretpostavci je $f'(x_0) \leq 0$, pa je

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0.$$

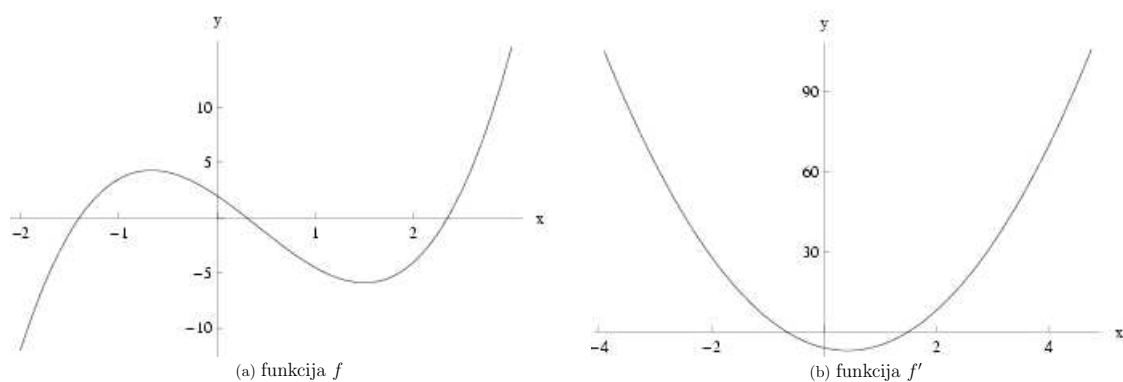
Kako je $x_2 - x_1 > 0$, onda je

$$f(x_2) - f(x_1) \leq 0,$$

odnosno

$$f(x_2) \leq f(x_1).$$

Dakle, funkcija f pada na $[a, b]$. Time je dokazan slučaj (a). Ostali slučajevi dokazuju se analogno. $\square$



Slika 9: Grafovi funkcija $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6x + 2$ i $f'(x) = 6x^2 - 5x - 6$

Primjer 4.2 *Odredimo intervale rasta i pada funkcije $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6x + 2$ (vidi Sliku 9 (a)).*

Deriviranjem funkcije f dobijemo $f'(x) = 6x^2 - 5x - 6$ (vidi Sliku 9 (b)).

Kako je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in I_1 = (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$, onda funkcija f strogo raste na intervalu I_1 . A kako je $f'(x) < 0$ za svaki $x \in I_2 = (-\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$, onda funkcija f strogo pada na I_2 .

5. CAUCHYJEV TEOREM

Teorem 5.1 (Cauchyjev teorem) *Neka su funkcije $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidne na segmentu $[a, b]$ i derivabilne na intervalu (a, b) . Ako je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in (a, b)$, onda je $g(a) \neq g(b)$, te postoji točka $x_0 \in (a, b)$ takva da je*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \quad (7)$$

Dokaz. Definirajmo pomoćnu funkciju $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ formulom

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)].$$

Deriviranjem dobivamo

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x). \quad (8)$$

Uočimo da je funkcija h dobro definirana tj. $g(a) \neq g(b)$. Dokažimo kontradikcijom. Kada bi vrijedilo $g(a) = g(b)$ uz pretpostavke da je g neprekidna na segmentu $[a, b]$ i derivabilna na intervalu (a, b) , onda bi po Teoremu 4.1 postojala točka $x_0 \in (a, b)$ takva da

$$g(b) - g(a) = g'(x_0)(b - a),$$

odnosno

$$0 = g'(x_0)(b - a).$$

Tada bi slijedilo

$$g'(x_0) = 0$$

što je kontradikcija s pretpostavkom da je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in (a, b)$. Dakle, funkcija h je dobro definirana. Prema Teoremu 3.1 postoji točka $x_0 \in (a, b)$ takva da je $h'(x_0) = 0$. Uvrštavanjem u jednakost (8) dobivamo

$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x_0) = 0,$$

odnosno

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Time je teorem dokazan. □

Primjedba 5.1 (Geometrijska interpretacija Cauchyjevog teorema) *Geometrijska interpretacija Cauchyjevog teorema analogna je geometrijskoj interpretaciji Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti. (vidi Primjedbu 4.1).*

Primjedba 5.2 *Cauchyjev teorem je poopćenje Lagrangeovog teorema. Uočimo da zamjenom $g(x) = x$ za svaki $x \in [a, b]$ u jednakosti (7) dobivamo*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(x_0)}{1}$$

što je ekvivalentno izrazu u Lagrangeovom teoremu.

Primjer 5.1 *Provjerimo da li su ispunjeni uvjeti Cauchyjevog teorema za funkcije $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$ na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ (vidi Sliku 10).*

Funkcije f i g su neprekidne na $[0, \frac{\pi}{2}]$ i derivabilne na $(0, \frac{\pi}{2})$. Deriviranje dobijemo

$$f'(x) = \cos x \quad \text{i} \quad g'(x) = -\sin x,$$

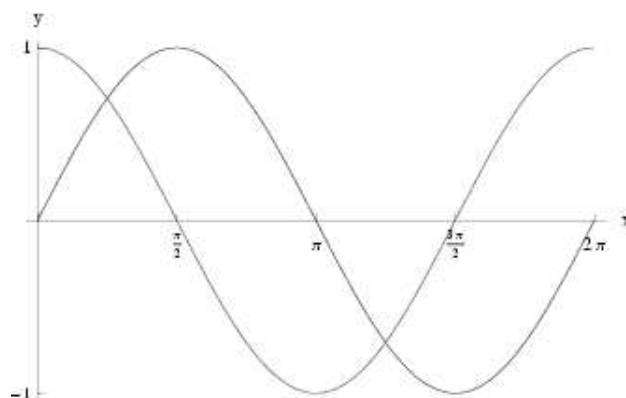
odakle vidimo da je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Dakle, zadovoljeni su svi uvjeti Cauchyjevog teorema. Sada možemo naći točku x_0 takvu da je

$$\frac{f(\frac{\pi}{2}) - f(0)}{g(\frac{\pi}{2}) - g(0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \quad (9)$$

Kako je

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad g(0) = 1, \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

uvrštavanjem u formulu (9), dobijemo da je točka $x_0 = \frac{\pi}{4}$.



Slika 10: Graf funkcije $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$

6. TAYLOROV TEOREM

Teorem 6.1 (Taylorov teorem) *Neka je zadana funkcija $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ koja ima $(n + 1)$ -vu derivaciju na intervalu (a, b) , te neka je $x_0 \in (a, b)$ i p bilo koji prirodan broj. Tada za svaki $x \in (a, b)$ postoji realan broj ξ između x_0 i x takav da vrijedi*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(f, x_0; x), \quad (10)$$

gdje je

$$R_n(f, x_0; x) = \left(\frac{x - x_0}{x - \xi} \right)^p \frac{(x - \xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi). \quad (11)$$

Formulu (10) nazivamo Taylorovom formulom funkcije f u točki x_0 , a polinom

$$T_n(f, x_0; x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (12)$$

nazivamo n -tim Taylorovim polinomom funkcije f u točki x_0 . Za (11) kažemo da je n -ti ostatak funkcije f u točki x_0 .

Dokaz. Uzmimo neku točku $x \in (a, b)$, te ju fiksiramo. Neka je $x_0 < x$. Iz (10) slijedi da je

$$R_n(f, x_0; x) = f(x) - T_n(f, x_0; x).$$

Treba pokazati da postoji $\xi \in (a, b)$ takav da je

$$R_n(f, x_0; x) = \left(\frac{x - x_0}{x - \xi} \right)^p \frac{(x - \xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi).$$

Neka je t nezavisna varijabla koja poprima vrijednosti iz segmenta $[x_0, x]$. Definirajmo na segmentu $[x_0, x]$ pomoćnu funkciju ϕ formulom

$$\phi(t) = f(x) - T_n(f, t; x) - \frac{(x - t)^p}{(x - x_0)^p} R_n(f, x_0; x),$$

odnosno

$$\phi(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x - t) - \frac{f^{(2)}(t)}{2!}(x - t)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n - \frac{(x - t)^p}{(x - x_0)^p} R_n(f, x_0; x).$$

Funkcija ϕ je neprekidna na $[x_0, x]$ i derivabilna na (x_0, x) . Provjerimo da li vrijedi $\phi(x_0) = \phi(x)$.

$$\phi(x) = f(x) - T_n(f, x; x) - \frac{(x - x)^p}{(x - x_0)^p} R_n(f, x_0; x) = 0. \quad (13)$$

$$\phi(x_0) = f(x) - T_n(f, x_0; x) - \frac{(x - x_0)^p}{(x - x_0)^p} R_n(f, x_0; x),$$

odnosno

$$\phi(x_0) = f(x) - T_n(f, x_0; x) - R_n(f, x_0; x) = 0. \quad (14)$$

Iz (13) i (14) slijedi da je $\phi(x) = \phi(x_0)$. Dakle, zadovoljeni su svi uvjeti Teorema 3.1, pa postoji točka $\xi \in (x_0, x)$ takva da je $\phi'(\xi) = 0$. Deriviranjem funkcije ϕ po varijabli t dobivamo

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= -f'(t) + \left[\frac{f'(t)}{1!} - \frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x-t) \right] + \left[\frac{f^{(2)}(t)}{2!}2(x-t) - \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2 \right] + \dots \\ &\quad + \left[\frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(n-1)(x-t)^{n-2} - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \right] \\ &\quad + \left[\frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \right] + p \frac{(x-t)^{p-1}}{(x-x_0)^p} R_n(f, x_0; x). \end{aligned}$$

Svi članovi, osim zadnja dva, se pokrate, pa dobivamo

$$\phi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p \frac{(x-t)^{p-1}}{(x-x_0)^p} R_n(f, x_0; x).$$

Uvrštavanjem $t = \xi$, te iz $\phi'(\xi) = 0$ dobivamo

$$0 = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + p \frac{(x-\xi)^{p-1}}{(x-x_0)^p} R_n(f, x_0; x),$$

odnosno

$$\begin{aligned} R_n(f, x_0; x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \cdot \frac{(x-x_0)^p}{p(x-\xi)^{p-1}} \\ &= \left(\frac{x-x_0}{x-\xi} \right)^p \cdot \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi). \end{aligned}$$

Time je teorem dokazan. □

Primjedba 6.1 Promotrimo n -ti ostatak funkcije f , odnosno $R_n(f, x_0; x)$ iz (10). Prema Taylorovom teoremu, točka ξ leži između x_0 i x . Tada postoji $\theta \in \mathbb{R}$, $0 < \theta < 1$, takav da

$$\xi = x_0 + \theta(x - x_0).$$

Sada je

$$\begin{aligned} \xi - x_0 &= \theta(x - x_0) \\ x - \xi &= (x - x_0)(1 - \theta). \end{aligned}$$

Stoga, n -ti ostatak $R_n(f, x_0; x)$ možemo pisati u obliku

$$R_n(f, x_0; x) = \frac{(x - x_0)^p}{(x - x_0)^p (1 - \theta)^p} \cdot \frac{(x - x_0)^{n+1} (1 - \theta)^{n+1}}{n! p} f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)],$$

odnosno

$$R_n(f, x_0; x) = \frac{(x - x_0)^{n+1} (1 - \theta)^{n-p+1}}{n! p} f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)].$$

S obzirom na p , razlikujemo dva važna slučaja.

(a) Ako $p = n + 1$, tada

$$R_n(f, x_0; x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)] \quad (15)$$

nazivamo Lagrangeov oblik ostatka.

(b) Ako je $p = 1$, tada

$$R_n(f, x_0; x) = \frac{(x - x_0)^{n+1} (1 - \theta)^n}{n!} f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)]$$

nazivamo Cauchyjev oblik ostatka.

Primjer 6.1 Odredimo Taylorov polinom n -tog reda u okolini točke $x_0 = 0$ za funkciju $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Najprije izračunajmo prvih nekoliko derivacija funkcije f u točki x_0 .

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f^{(2)}(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{6}{(1-x)^4}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1-x)^5},$$

odnosno

$$f'(0) = 1, \quad f^{(2)}(0) = 2, \quad f^{(3)}(0) = 6, \quad f^{(4)}(0) = 24.$$

Sada, uvrštavanjem u (12) dobivamo Taylorov polinom n -tog reda:

$$T_n(f, x_0; x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$$

Primjedba 6.2 Neka je $x_0 = 0$. Tada formulu (10) nazivamo Maclaurinovom formulom, a polinom (12) n -tim Maclaurinovim polinomom koji glasi

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Uočimo da Taylorov red funkcije f u okolini točke x_0 glasi

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \quad (16)$$

a Maclaurinov red

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (17)$$

Primjer 6.2 *Odredimo Maclaurinov red za funkciju $f(x) = \ln(1 - x)$.*

Izračunajmo nekoliko prvih derivacija funkcije f u točki $x_0 = 0$.

$$f'(x) = \frac{-1}{(1-x)} , \quad f^{(2)}(x) = \frac{-1}{(1-x)^2} , \quad f^{(3)}(x) = \frac{-2}{(1-x)^3} , \quad f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1-x)^4} ,$$

odnosno

$$f'(0) = -1, \quad f^{(2)}(0) = -1, \quad f^{(3)}(0) = -2, \quad f^{(4)}(0) = -6.$$

Sada, uvrštavanjem u (17) dobijemo Maclaurinov red koji glasi

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$$

Teorem 6.2 *Taylorov red (16) konvergira broju $f(x)$, $x \in (a, b)$, onda i samo onda ako je*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f, x_0; x) = 0.$$

Dokaz. Uočimo da je n -ti Taylorov polinom (12) ujedno i n -ta parcijalna suma Taylorovog reda (16). Iz (10) dobivamo

$$f(x) - T_n(f, x_0; x) = R_n(f, x_0; x).$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj. Tada dobivamo

$$|f(x) - T_n(f, x_0; x)| < \varepsilon$$

onda i samo onda ako je

$$|R_n(f, x_0; x)| < \varepsilon.$$

Odnosno vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(f, x_0; x) = f(x)$$

onda i samo onda ako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f, x_0; x) = 0.$$

Time je teorem dokazan. □

Teorem 6.3 *Neka je zadana funkcija $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ i neka je $x_0 \in (a, b)$. Ako postoje realni brojevi $\delta > 0$ i $M > 0$ takvi da funkcija f ima derivacije svakog reda u okolini točke x_0 , te da svaki $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M,$$

onda je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f, x_0; x) = 0.$$

Odnosno, Taylorov red (16) konvergira broju $f(x)$ za svaki $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Dokaz. Iz Lagrangeovog oblika ostatka (15) dobivamo ocjenu

$$\begin{aligned} 0 \leq |R_n(f, x_0; x)| &= \left| \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)] \right| \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))| |x - x_0|^{n+1} \\ &\leq \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} M. \end{aligned}$$

Budući da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} M = 0,$$

prijelazom na limese dobivamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f, x_0; x) = 0.$$

Time je teorem dokazan. □

Primjer 6.3 (*Preuzeto iz [4]*) Napišimo Maclaurinov red za eksponencijalnu funkciju i trigonometrijske funkcije, te provjerimo konvergenciju.

(i) Eksponencijalna funkcija $x \mapsto e^x$.

Uočimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f^{(k)}(x) = e^x \quad i \quad f^{(k)}(0) = 1.$$

Tada su za proizvoljni $M > 0$ sve derivacije ove funkcije na segmentu $[-M, M]$ ograničene s e^M . Prema Teoremu 6.3, Maclaurinov red ove funkcije konvergira prema e^x za svaki $x \in [-M, M]$, odnosno

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Trigonometrijske funkcije $x \mapsto \sin x$ i $x \mapsto \cos x$.

Promotrimo prvih par derivacija funkcije $f(x) = \sin x$.

$$f'(x) = \cos x, \quad f^{(2)}(x) = -\sin x, \quad f^{(3)}(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x,$$

a za $x = 0$ vrijedi

$$f'(0) = 1, \quad f^{(2)}(0) = 0, \quad f^{(3)}(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0.$$

Dakle, apsolutne vrijednosti svih derivacija su ograničene s 1, odnosno

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1, \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Maclaurinov red ove funkcije konvergira prema $\sin x$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, odnosno

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Promotrimo sada prvih par derivacija funkcije $f(x) = \cos x$.

$$f'(x) = -\sin x, \quad f^{(2)}(x) = -\cos x, \quad f^{(3)}(x) = \sin x, \quad f^{(4)}(x) = \cos x,$$

a za $x = 0$ vrijedi

$$f'(0) = 0, \quad f^{(2)}(0) = -1, \quad f^{(3)}(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = 1.$$

Dakle, vrijedi

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1, \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Maclaurinov red ove funkcije konvergira prema $\cos x$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, odnosno

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Primjedba 6.3 Za beskonačno puta derivabilnu funkciju f kažemo da je analitička u točki x_0 ako postoji interval (a, b) takav da njezin Taylorov red u točki $x_0 \in (a, b)$ konvergira broju $f(x)$ za svaki $x \in (a, b)$. Funkciju koja je analitička u svakoj točki svoje domene nazivamo analitičkom funkcijom.

7. LITERATURA

- [1] I. N. Bronštejn, Matematički priručnik, Golden marketing - Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.
- [2] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, Matematika, Ekonomski fakultet, Osijek, 1994.
- [3] B. P. Demidovič, Zadaci i riješeni primjeri iz matematičke analize za fakultete, Croatiaknjiga, Zagreb, 2003.
- [4] D. Jukić, R. Scitovski, Matematika I, Odjel za matematiku, Osijek, 2000.
- [5] S. Kurepa, Matematička analiza: Diferenciranje i integriranje, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.
- [6] S. Kurepa, Matematička analiza: Funkcije jedne varijable, Tehnička knjiga, Zagreb, 1977.

BESPLATNI GOTOVI SEMINARSKI, DIPLOMSKI I MATURSKI RAD.

**RADOVI IZ SVIH OBLASTI, POWERPOINT PREZENTACIJE I DRUGI EDUKATIVNI
MATERIJALI.**



WWW.SEMINARSKIRAD.ORG

WWW.MATURSKIRADOVI.NET

WWW.MATURSKI.NET

WWW.SEMINARSKIRAD.INFO

WWW.MATURSKI.ORG

WWW.ESSAYSX.COM

WWW.FACEBOOK.COM/DIPLOMSKIRADOVI

NA NAŠIM SAJTOVIMA MOŽETE PRONAĆI SVE, BILO DA JE TO **[SEMINARSKI](#)**, **[DIPLOMSKI](#)** ILI **[MATURSKI](#)** RAD, POWERPOINT PREZENTACIJA I DRUGI EDUKATIVNI MATERIJAL. ZA RAZLIKU OD OSTALIH MI VAM PRUŽAMO DA POGLEDATE SVAKI RAD, NJEGOV SADRŽAJ I PRVE TRI STRANE TAKO DA MOŽETE TAČNO DA ODABERETE ONO ŠTO VAM U POTPUNOSTI ODGOVARA. U BAZI SE NALAZE **[GOTOVI SEMINARSKI, DIPLOMSKI I MATURSKI RADOVI](#)** KOJE MOŽETE SKINUTI I UZ NJIHOVU POMOĆ NAPRAVITI JEDINSTVEN I UNIKATAN RAD. AKO U **[BAZI](#)** NE NAĐETE RAD KOJI VAM JE POTREBAN, U SVAKOM MOMENTU MOŽETE NARUČITI DA VAM SE IZRADI NOVI, UNIKATAN SEMINARSKI ILI NEKI DRUGI RAD RAD NA LINKU **[IZRADA RADOVA](#)**. PITANJA I ODGOVORE MOŽETE DOBITI NA NAŠEM **[FORUMU](#)** ILI NA **MATURSKIRADOVI.NET@GMAIL.COM**