

GIMNAZIJA IVANA ZAKMARDIJA DIJANKOVEČKOGA KRIŽEVCI

MATURALNI RAD

NA MATURI U LJETNOM ROKU ŠKOLSKE GODINE 20xx./20xx.

**MATEMATIČKO OBJAŠNJENJE
KARTAŠKIH TRIKOVA**

Mentor
Rrrrrr Rrrrrrrrr , prof.

Maturant
Xxxxxx Xxxxxx

Križevci, svibanj 20xx.

SADRŽAJ:

➤ Uvod	1
➤ Trik s 21 kartom	2
Matematičko objašnjenje prvog kartaškoga trika.....	3
➤ Memori trik	6
Matematičko objašnjenje drugog kartaškoga trika.....	8
➤ 4 asa.....	10
Matematičko objašnjenje trećeg kartaškoga trika	11
➤ Pogađanje karte s dna špila	12
Matematičko objašnjenje četvrtog kartaškoga trika.....	13
➤ Zanimljivost zbrajanja i oduzimanja	14
Matematičko objašnjenje petog kartaškoga trika	15
➤ MFL trik	16
Matematičko objašnjenje šestog kartaškoga trika	17
➤ Zaključak	19
➤ Literatura	20

Uvod

Sigurna sam da očekujete dobro obrazloženje zašto sam uzela ovu temu za maturalnu radnju. Mnogi bi mogli prigovoriti kako odabrana tema nije tema za školu, a kamoli za maturalni rad iz matematike. Koliko god se nekima činilo neozbiljno obrađivati kartaške trikove u školi gdje su karte strogo zabranjene, toliko je meni ta tema bila izazovna i egzotična.

Trikove koje sam obradila u ovoj radnji svo svoje objašnjenje imaju u matematici, što će reći da pri izvođenju bilo kojeg od ovih trikova ne koristim tuđu nepažnju, prijevaru, magiju ili čaroliju osim čaroliju matematike. Ovi trikovi su «čisti» odnosno dokazivi, te ih svatko može izvesti, a da i ne zna zašto i kako oni funkcioniraju. Još od malena znam trik s 21 kartom, (str. 2) i koliko god puta ga izvodila on je uspio, a da nisam znala zašto. Jednom sam ga odlučila pokazati svom profesoru iz matematike i upitala ga zna li on zašto trik uvijek «radi». Profesor je rekao da ću mu to objasniti na maturi. Upravo je to razlog zašto pišem radnju iz matematike na tu temu.

Počela sam sakupljati trikove koje je moguće matematički objasniti, te je iz jedne šale to preraslo u radnju koja obuhvaća opis šest kartaških trikova i njihovo matematičko objašnjenje. Veći dio trikova da se objasni jednostavnim funkcijama zbrajanja i oduzimanja, dok drugi trikovi zahtijevaju znanje iz permutacija i kombinatorike, kao i poznavanje matematičkih nizova.

Trik s 21 kartom

Za izvođenje ovoga kartaškoga trika, potrebna vam je 21 karta, iz standardnog špila karata*. Karte položite na stol i kažete promatraču da odabere i zapamti jednu od 21 karte. Bitno je napomenuti da onaj koji izvodi trik, ne smije znati koju je kartu promatrač izabrao.

Kada je promatrač odabrao kartu, podignite sve karte sa stola. Promatraču kažete da ćete dijeliti karte u tri stupca, te da pažljivo prati kako bi vam, na kraju mogao reći u kojem je stupcu njegova karta.

Karte dijelite okomito, jednu za drugom, u tri stupca. Kada podijelite sve karte, pitate promatrača u kojem je stupcu njegova karta (prvom, drugom ili trećem). Stupac u kojem se nalazi promatračeva karta, stavljate u sredinu, između preostala dva stupca karata. Isti postupak ponovite još dva puta. Bitno je da promatrač dobro motri svoju kartu, da vam točno kaže u kojem je stupcu njegova karta, i da svaki put taj stupac stavite između preostala dva.

Nakon što ste isti postupak ponovili tri puta, odbrojite 10 karata sa vrha špila i okrenite 11. kartu. Na iznenađenje vašeg promatrača, upravo je to karta koju je on izabrao između 21 karte. Ako vaš promatrač pomisli da je riječ o slučajnosti, izvedite trik još jednom. A, ako ni tada neće vjerovati, neka sam pokuša izvesti ovaj jednostavan trik i uvjeri se da i on može biti «mađioničar».

Ovaj pomalo čaroban trik, ne skriva magiju već zanimljiv matematički niz.

*standardni špil karata sadrži 52 karte. Vrijednosti se kreću od 2,3,4,5,6,7,8,9,10, dečka(B), dame(D), kralja(K) i asa(A), kroz četiri boje, odnosno oblika: karo♦, žir♣, pik♠ i srce♥.

Matematičko objašnjenje prvog kartaškoga trika

Kako karte nižemo po stupcima, tako svakoj karti pridružimo njenu poziciju. Tako će 1. karta u prvom stupcu imati poziciju 1, prva karta u drugom stupcu poziciju 2, prva karta u 3. stupcu poziciju 3, druga karta u prvom stupcu poziciju 4, i tako sve do zadnje 21. pozicije, a to je sedma (zadnja) karta u trećem stupcu.

Dakle u 1. stupcu nalaze se karte sljedećih pozicija: 1, 4, ..., 19 odnosno sve karte za koje vrijedi

$$3n + 1 \text{ za } n=0,1,2,\dots,6$$

U 2. stupcu nalaze se karte pozicija 2, 5, ..., 20 odnosno $3n + 2$ za $n=0,1,2,\dots,6$

U 3. stupcu nalaze se karte pozicija 3, 6, ..., 21 odnosno $3n + 3$ za $n=0,1,2,\dots,6$

1.stup.	2.stup.	3.stup.	$f(l)$	$(fof)(l)$	$(fofof)(l)$
1	2	3	$\rightarrow$ 8	$\rightarrow$ 10	$\rightarrow$ 11
4	5	6	$\rightarrow$ 9	$\rightarrow$ 10	$\rightarrow$ 11
7	8	9	$\rightarrow$ 10	$\rightarrow$ 11	$\rightarrow$ 11
10	11	12	$\rightarrow$ 11	$\rightarrow$ 11	$\rightarrow$ 11
13	14	15	$\rightarrow$ 12	$\rightarrow$ 11	$\rightarrow$ 11
16	17	18	$\rightarrow$ 13	$\rightarrow$ 12	$\rightarrow$ 11
19	20	21	$\rightarrow$ 14	$\rightarrow$ 12	$\rightarrow$ 11

Stupac u kojem se nalazi odabrana karta (kao što je opisano u postupku izvođenja trika) stavljamo u sredinu (između preostala dva stupca). Uočimo da u opisanom preslikavanju nakon svaka tri broja karta poveća vrijednost za 1, dakle za $l=1,2,3$ je $f(l)=8$, za $l=4,5,6$ je $f(l)=9$, itd.

Ovo preslikavanje možemo zapisati funkcijom:

$$f(l) = \left\lfloor \frac{l-1}{3} \right\rfloor + 8, \quad l=1,2,3,\dots,21; \quad \text{gdje je } \left\lfloor \frac{l-1}{3} \right\rfloor \text{ najveće cijelo od } \frac{l-1}{3}.$$

Iz našeg primjera vidimo da ova funkcija realnom broju, $X \in \mathbb{R}$, pridružuje najveći cijeli broj koji je manji od njega, tj. zapišemo $X=A+\alpha$, gdje je $A \in \mathbb{Z}$ i $\alpha \in [0,1)$, tada je $\lfloor X \rfloor = \lfloor A+\alpha \rfloor = A$.

$$\text{U našem primjeru za } l=1 \text{ je } \left\lfloor \frac{l-1}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{l-1}{3} \right\rfloor = \lfloor 0+0 \rfloor = 0, \text{ za } l=2 \text{ je } \left\lfloor \frac{2-1}{3} \right\rfloor = \left\lfloor 0+\frac{1}{3} \right\rfloor = 0$$

$$\text{za } l=3 \text{ je } \left\lfloor \frac{3-1}{3} \right\rfloor = \left\lfloor 0+\frac{1}{3} \right\rfloor = 0, \text{ za } l=4 \text{ je } \left\lfloor \frac{4-1}{3} \right\rfloor = \lfloor 1+0 \rfloor = 1, \text{ za } l=5 \text{ je}$$

$$\left\lfloor \frac{5-1}{3} \right\rfloor = \left\lfloor 1+\frac{1}{3} \right\rfloor = 1, \dots, \text{ za } l=21 \text{ je } \left\lfloor \frac{21-1}{3} \right\rfloor = \left\lfloor 6+\frac{2}{3} \right\rfloor = 6.$$

U ovom triku funkcija f predstavlja stavljanje stupca, u kojem je odabrana karta, u sredinu.

Odabrana karta može biti za bilo koji broj $l=1,2,3,\dots,21$. Prvim korakom dobivamo

$$f(l) = \left\lfloor \frac{l-1}{3} \right\rfloor + 8.$$

Ponovnim stavljanjem stupca s odabranom kartom u sredinu vršimo kompoziciju funkcije, tj.

$$\text{odabrana karta sada ima vrijednost } \left\lfloor \frac{l-1}{3} \right\rfloor + 8 \text{ i funkcija } f \text{ djeluje na taj}$$

$$\text{broj ovako } f\left(\left\lfloor \frac{l-1}{3} \right\rfloor + 8\right) = f(f(l)) = (f \circ f)(l)$$

Sada dobiveni broj pripada odabranoj karti te ponovnim stavljanjem u sredinu tj.

$$\text{djelovanjem funkcije } f \text{ na taj broj } \left\lfloor \frac{l-1}{9} \right\rfloor + 10 \text{ dobivamo i treću kompoziciju.}$$

Sada je $(fofof)(l)$

$$\begin{aligned}
 f(f(f(l))) &= f\left(\left\lfloor \frac{l-1}{9} \right\rfloor + 10\right) \\
 &= \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{l-1}{9} \right\rfloor + 10 - 1}{3} \right\rfloor + 8 \\
 &= \left\lfloor \frac{1}{3} \cdot \left\lfloor \frac{l-1}{9} \right\rfloor + 3 \right\rfloor + 8 \\
 &= \left\lfloor \left\lfloor \frac{l-1}{27} \right\rfloor + 3 \right\rfloor + 8 \\
 &= \left\lfloor \frac{l-1}{27} \right\rfloor + 11
 \end{aligned}$$

Dakle $f(f(f(l))) = \left\lfloor \frac{l-1}{27} \right\rfloor + 11$, za sve $l=1,2,3,\dots,21$ je $(fofof)(l) = 11$ jer je $\left\lfloor \frac{l-1}{27} \right\rfloor = 0$

Memori trik

Za izvođenje ovog kartaškog trika potrebno vam je bilo kojih 20 karata iz špila. Karte podijelite u 10 parova (svaki par sadrži dvije karte). Promatraču kažete da dobro zapamti jedan par karata, od ponuđenih deset. (Kao i u prethodnom triku izvođač trika ne zna koji je par promatrač odabrao).

Nakon što je promatrač zapamtio jedan par, pažljivo sakupite sve parove sa stola, pazeći da pritom ne izmiješate parove. Dvije karte koje su bile zajedno na stolu, moraju i nakon što ih pokupite i stavite u ruku ostati par (i tako svih deset parova). Nakon što ste pokupili svih deset parova (20 karata) sa stola, i držite ih u ruci, polažete svaku kartu na njoj točno određenu poziciju unutar četiri retka i pet stupaca. Slaganje odabranih 20 karata, odnosno 10 parova, slažemo prema točno određenom redu, tako da svaka karta ima svoju poziciju unutar spomenutih redaka i stupaca, kao u igri memori. Radi lakšeg izvođenja trika dobro se poslužiti ovim riječima: MARIA, VIVET, PROPE, MUTUO.

M	A	R	I	A
V	I	V	E	T
P	R	O	P	E
M	U	T	U	O

U ponuđenim riječima svako se slovo pojavljuje samo dva puta, (dakle ono predstavlja jedan par karata) na točno određenom mjestu. Kada karte (koje ne moraju biti par ni u znaku, ni u

vrijednosti, već ih veže samo isto slovo) razvrstate prema danoj shemi, na promatračev odgovor u kojem se redu/redovima nalazi njegov par, točno ćete znati o kojim je dvjema kartama riječ, odnosno koje su njegove karte koje je odabrao na samom početku trika.

Matematičko objašnjenje drugog kartaškoga trika

Bijekcija parova karti sa slovima matematička je osnova ovoga trika. No da bi spomenuta bijekcija funkcionirala važno je rasporediti slova (karte) u 4(retka) x 5(stupaca) prema određenim pravilima.

U svaki redak možemo smjestiti najviše jedan par, u suprotnom ne bismo znali o kojem se paru karata radi. Ako u svakom retku imamo po jedan par (kao što je prikazano u ponuđenoj shemi u opisu samog trika) locirali smo 4 para, te nam je ostalo još šest parova koje valja smjestiti na preostala prazna mjesta, ali tako da članove dvaju različitih parova ne smjestimo u zajednički redak. Način na koji smo to učinili može se potkrijepiti sljedećim računom. Broj redaka je 4, dakle broj načina na koliko je moguće od 4 redaka odabrati dva u koja ćemo smjestiti par je

$$\left(\frac{4}{2}\right) = 6 \text{ točno onoliko različitih načina koliko nam je još parova preostalo.}$$

1. redak – tri različita slova*
2. redak – dva različita slova + jedno kao iz prvog retka
3. redak – jedno različito slovo + jedno kao iz prvog retka + jedno kao iz drugog retka
4. redak – jedno kao iz prvog retka + jedno kao iz drugog retka + jedno kao iz trećeg retka

*slovo- jedno mjesto unutar retka, koje sa istim slovom čini par

U ovom triku preostalih šest parova razmjestili smo tako da smo u prvom retku preostala tri mjesta od pet (u svakom retku dva mjesta zauzima par) popunili s tri nova slova (slovo označava dio para, koji s istim takvim čini par). U drugom retku stavili smo jedno slovo koje sa slovom iz

prvog retka čini par, i dva nova slova. U trećem retku od tri nova slova jedan je u paru s prvim redom, a drugi svoj par ima u drugom retku, dok treće još nema svoga para. U četvrtom retku od tri nova slova, jedan je u paru sa slovom iz trećeg retka, drugi u paru sa slovom iz prvoga retka i treći je u paru sa slovom iz drugoga retka. Radi lakšeg razumijevanja pogledajte shematski prikaz u opisu trika.

4 asa

Za izvođenje ovog kartaškog trika potreban je cijeli špil karata. No prije samog početka trika potrebno je od špila odvojiti sve aševe (njih četiri) i sve karte od 2-9 samo jedne boje. Nakon što ste to učinili na vrh špila prvo položite sve aševe, a potom karte od devet do dva, tako da je devetka na zadnjem asu a dvojka na samom vrhu špila.

Promatraču kažete da vam kaže jedan broj od 11 do 19. Uzmimo za primjer da je vaš promatrač rekao broj 15. Vi tih 15 karata odbrojite, sa prethodno pripremljenog špila, i položite na stol. Zatim zbroj znamenaka (promatračevog) odabranog broja, u ovom slučaju (zbroj znamenaka 1 i 5) to je broj 6, odbrojite natrag na vrh preostalog špila, a sljedeću kartu (u ovom slučaju) 7. kartu otvorite na stol. Karta koja će se pojaviti na stolu je jedna od aševa. Ostatak karata koje držite u ruci vratite na vrh špila.

Ovaj algoritam ponovite još dva puta, tako ćete dobiti sljedeća dva asa. Na stolu su tri asa, a u špilu se krije još jedan, do kojeg ćete doći na sljedeći način. Svom promatraču kažete da sada izabere jedan broj od 1 do 9. Pretpostavimo da je promatrač rekao broj 6. Šest karata ćete odbrojiti sa vrha špila, polažući ih zatvorene na stol, dok ćete šestu kartu otvoriti.

Na toj karti će vam pisati koliko je još karata preostalo do zadnjeg asa. Brojite od jedan do tog broja kojeg pokazuje ta karta, ali tako da brojite i tu kartu. Primjerice ako ta karta pokazuje broj 4, brojite tu kartu 1 i tako sve do 4. Tu četvrtu kartu otvarate jer upravo je to posljednji as u špil.

Zvuči nevjerovatno, no ipak je moguće!

Vrlo jednostavno, to ćemo dokazati i matematički.

Matematičko objašnjenje trećeg kartaškoga trika

Način na koji smo pronašli prva tri asa jednak je opisanom postupku pa tako i matematičkom dokazu iz petog trika (str. 14-15).

Kako smo došli do posljednjeg (četvrtog) asa u špil, koji se nalazi ispod redom poredanih 8 karata, tako da se na asu nalazi dvojka a na vrhu špila devetka, matematički ću objasniti na sljedeći način.

Izabrani broj $k \in \{2, 3, \dots, 9\}$ odbrojili smo do k -te karte koju smo potom okrenuli. Na njoj je broj $9-k+1$ jer brojevi na kartama čine padajući niz $9, 8, 7, \dots, 2$.

Budući da je to broj karata do asa, ta k -ta karta pokazuje nam koliko je karata preostalo do posljednjeg asa u špil.

Pogađanje karte s dna špila

Za izvođenje ovog trika također je potreban cijeli špil karata. Promatraču pružite karte i kažete mu neka ih izmiješa i neka zapamti kartu koja je na dnu špila. Kada je to učinio vraća vam karte ali tako da vi ne možete vidjeti donju kartu.

Uzimate špil i sa vrha špila stavljate jednu po jednu kartu na stol (ne otvarajući ih) sve do 12. karte. Nakon toga zamolite promatrača da otvori bilo koje četiri karte sa stola. Kada je to učinio, ostatak karata (njih 8) skupite i vraćate na dno špila.

Uzmimo za primjer da su promatračeve karte, koje je otvorio, bile: 3, 5, 7 i kralja (K). Sljedeće što vam je činiti jest nadopuniti vrijednosti ovih karata do 10. Na kartu vrijednosti 3 stavit ćete sedam karata; na kartu 5, pet karata; na kartu 7, tri karte, a na kralja nećete staviti ništa jer on već vrijedi deset (kao i desetka, dečko(B), dama(D), i as(AS)).

Kada ste nadopunili vrijednost karata do deset sljedeće što vam je činiti je zbrojiti vrijednosti tih četiriju karata (onih četiriju koje je promatrač otvorio). U našem slučaju to izgleda ovako: $3+5+7+10=25$.

Držite špil karata u ruci i kažete promatraču da broji do 25. Vi ih zatvorene polažete na stol, a 25. kartu otvarate. Upravo je to karta s dna špila, koju je promatrač vidio i zapamtio, na samom početku izvođenja trika

Matematičko objašnjenje četvrtog kartaškoga trika

U opisu trika vidimo da se tražena karta nalazi na 40. mjestu, brojeći odozgo. Također zbroj opisanih četiriju hrpa daje 40. Budući da je iz špila izvučena razlika zbroja do 40 zbroj odabranih karata odgovara upravo broju karata do tražene karte. Tu tvrdnju možemo zapisati pomoću jednadžbi.

$$A1+K1=10$$

$$A2+K2=10$$

$$A3+K3=10$$

$$A4+K4=10$$

K1, K2, K3, K4 vrijednosti su četiriju otvorenih karata

Sada je $A1+A2+A3+A4$ ukupan broj karata koje smo odstranili iz špila pa je broj preostalih karata iznad tražene karte $40 - (A1+A2+A3+A4) = K1+K2+K3+K4$

Zanimljivost zbrajanja i oduzimanja

U izvođenju ovog kartaškog trika također su uključene sve karte iz špila. Karte pružite promatraču i kažete mu neka ih dobro izmiješa. Dok miješa karte neka zamisli jedan broj između 10 i 19. Kada je to učinio neka zamišljen broj karata odbroji sa vrha špila u novu skupinu karata i odloži na stol. Neka to čini vrlo tiho, kako vi ne bi znali koliko je karata on odbrojio, a ni vidjeli (jer ste mu cijelo vrijeme okrenuti leđima).

Zamolite promatrača da uzme u ruku manji dio špila, (taj kojeg je odbrojio) recimo da je u njemu 16 karata i neka zbroj tih znamenaka, dakle u ovom slučaju 7, odbroji natrag na veći dio špila. Nakon što je i to učinio kažete mu neka dobro zapamti donju kartu s manjeg špila i položi taj špil na ovaj veći.

Karta koju je promatrač vidio i upamtio nalazi se negdje u špilu i čini se kako nema načina da ju vi otkrijete. No, situacija ne može biti jednostavnija. Odbrojite devet karata s vrha špila i tu devetu otvorite. Ta karta je naravno, promatračeva karta!

Matematičko objašnjenje petog kartaškoga trika

Ako izabranom broju od 10 do 19 oduzmemo zbroj njegovih znamenaka, uvijek ćemo dobiti broj 9. Zvuči nevjerojatno, no matematički se ta zanimljivost razlike zbroja može vrlo jednostavno objasniti.

Uobičajeno je brojeve u pozicijskom sustavu zapisati na sljedeći način

$$\overline{1a} = 10 + a$$

$$a \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

$$\begin{aligned} \overline{1a} - (1 + a) &= 10 + a - 1 - a \\ &= 9 \end{aligned}$$

MFL trik

Ime MFL trik, dala sam zato što sam ga pronašla u Matematičko-fizičkom listu. Ovaj trik je drugačijeg karaktera od prethodnih pet trikova, te sam ga zbog toga uvrstila kao posljednjeg u svoju radnju. Ono što je kod njega drugačije u odnosu na sve ostale trikove, jest to da onaj kojem se trik izvodi mora biti više uključen u sam trik, odnosno zahtijeva veću pozornost. Da bi se trik uopće mogao izvesti potrebno je minimalno znanje iz permutacija, koje mora imati izvođač trika, kao i promatrač, koji u ovom slučaju nije samo promatrač već je važna karika u samom triku. O čemu se zapravo radi?

Između petero nasumce izvučenih karata iz špila, uvijek će barem dvije biti jednake boje (znaka), zato jer u špilu postoje samo četiri različite boje (srce, karo, pik i žir). Jednu kartu otvoreno položite na stol, dok drugu, koja je iste boje, položite na stol zatvorenu. Onaj kojem se trik izvodi mora pogoditi vašu kartu, a vi ćete mu pomoći da dođe do tražene karte pomoću preostalih triju karata koje držite u ruci. Od tih triju karata napraviti ćete permutaciju tako da zbroj s otvorenom kartom daje vrijednost tražene karte (kao što je rečeno boja je jednaka kao na zadanoj karti). Od tri karte moguće je učiniti šest permutacija. Ako je razlika između zadane i tražene karte veća od šest onda se ona karta čija je veća vrijednost daje kao zadana, a čija je manja vrijednost kao karta koju treba pogoditi. Pritom je važno napomenuti da iza vrijednosti asa ponovno dolazi dvojka, dakle 2,3,4,5,6,7,8,9,10,dečko, dama, kralj, as, dva, tri, četiri,..., itd. Budući da se trik ne može izvesti bez matematičkog znanja, tako se ne može ni opisati bez matematičkog objašnjenja.

Matematičko objašnjenje šestoga kartaškoga trika

Kao što je spomenuto, među 5 karata prema Dirichletovom principu postoje barem dvije karte jednakih boja. Boju tražene karte znamo prema zadanoj karti, a vrijednost tražene karte saznat ćemo pomoću preostalih 3. S te tri karte možemo odrediti brojeve od 1 do 6, primjenjujući permutacije.

Dogovorimo se da permutacije idu po jačini karata npr.:

5, 8, K – 1. permutacija

5, K, 8 – 2. permutacija

8, 5, K – 3. permutacija

8, K, 5 – 4. permutacija

K, 5, 8 – 5. permutacija

K, 8, 5 – 6. permutacija

Ako imamo jednake vrijednosti npr. 5, 8, 8 onda osmice razlikujemo prema boji. Najjača boje je herc, pa pik, pa karo, a najslabija je žir.

5, 8♣, 8♣ – 1. permutacija

5, 8♥, 8♣ – 2. permutacija

.

.

.

8♥, 8♣, 5 – 6. permutacija

Na skupu od 5 nasumce izabrane karte mogu demonstrirati cijeli postupak. Recimo da su to sljedeće karte: 8♥, dečko(B)♥, 5, 8, 10. Otvorimo 8♥ kao zadanu kartu, a dečka položimo zatvorenu na stol (karta koju valja pogoditi).

2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	B,	D,	K,	AS
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Od karata 5, 8, 10 (čija boja u ovom slučaju nije važna, budući da su vrijednosti svih triju karti različite) načinimo onu permutaciju kolika je razlika između tražene i zadane karte.

U ovom primjeru razlika između dečka i osmice je tri, pa ćemo stoga napraviti treću permutaciju koja izgleda ovako: 8, 5, 10.

Problem nastaje ako je razlika između karata istih boja (zadane i tražene) veća od šest npr. kao u slučaju $3\heartsuit$, dečko($B\heartsuit$), 5, 8, 10. Razlika između dečka i trojke je 11, a tu je permutaciju pomoću tri karte nemoguće izvesti. U tom slučaju uzimamo veću kartu kao zadanu, dakle dečka, a trojku (manju kartu) stavljamo na mjesto tražene karte. Tako će razlika između njih biti 5, te ćemo učiniti 5. permutaciju (10, 5, 8).

Tu je sadržan matematički pojam kongruencije. Kada prelazimo preko asa tj. broja 13 dobivamo brojeve 14, 15, 16, 17, ..., no mi ga moramo vratiti u početni skup od 1 do 13, a to postizemo pomoću kongruencije. Tako je $15 \equiv 2 \pmod{13}$ tj. 2 i 15 su u kartama 3.

Općenito je $a \equiv b \pmod{n}$ ako je $a - b$ djeljivo s n tj. $n \mid a - b$.

Zaključak

Nadam se da sam uspjela dobro opisati i objasniti ovih šest kartaških trikova, te da će svatko kad pročita ponuđeni opis i sam moći izvesti trik i razumjeti kako on «radi».

Prilikom sakupljanja materijala za radnju, odnosno pri pronalaženju kartaških trikova imala sam znatnih problema jer ne postoji adekvatna literatura. Većina trikova koje ljudi znaju i izvode ne nalaze oslonac u matematici, te su kao takvi meni bili nekorisni i nezanimljivi. To me nije obeshrabilo da ne dovršim radnju, te se pokazalo da je moguće i bez literature kao što su udžbenici, knjige, enciklopedije i razni drugi priručnici (koji su uobičajeni izvor informacija svake maturalne radnje) napraviti jedan ovakav rad.

Pri sakupljanju trikova od velike pomoći bili su mi prijatelji kojima ovim putem zahvaljujem. Osim prijateljima želim zahvaliti svom profesoru i mentoru Ratku Višaku, koji je nadgledao cijeli rad i pomagao kad je trebalo.

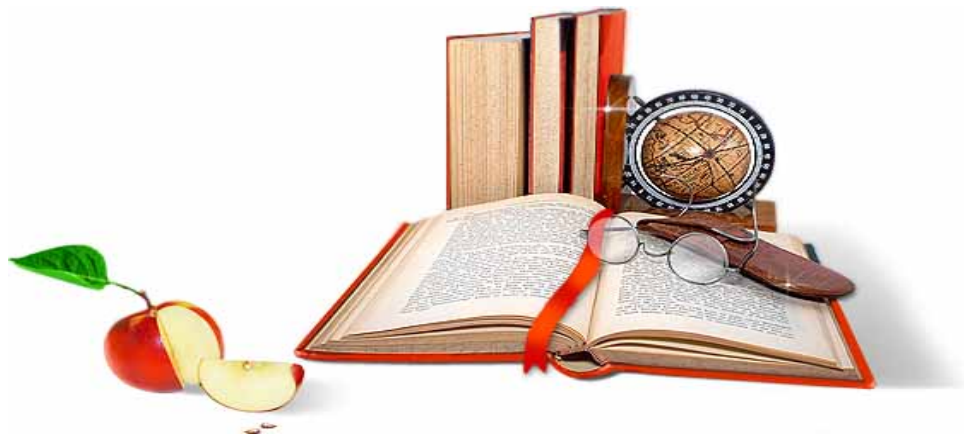
Nadam se da ovi trikovi neće poslužiti samo za obranu moje maturalne radnje. Primjenom ovih kartaških trikova na nastavi matematike satovi bi mogli biti zanimljiviji, a gradivo prihvaćenije od šireg kruga učenika.

Literatura

- Dakić, B., Mladinić P., Pavković B. 1994. Elementarna teorija brojeva. Element. Zagreb
- Dakić, B., Hanjš Ž., Mladinić P., Pavković B. 1994. Male teme iz matematike. Element, Zagreb.
- Elezović N. 2000. Matematika 2: udžbenik za 2. razred gimnazije. Element. Zagreb.
- Elezović N. 2000. Matematika 4: udžbenik za 4. razred gimnazije. Element. Zagreb.
- Hrvatsko matematičko društvo i Hrvatsko fizikalno društvo. 2002.-2003. Matematičko-fizički list. 1/209 Element. Zagreb.
- www.cut-the-knot.org/arithmetic/rapid/baffle.shtml
- www.math.ualberta.ca

BESPLATNI GOTOVI SEMINARSKI, DIPLOMSKI I MATURSKI RAD.

**RADOVI IZ SVIH OBLASTI, POWERPOINT PREZENTACIJE I DRUGI EDUKATIVNI
MATERIJALI.**



WWW.SEMINARSKIRAD.ORG

WWW.MATURSKIRADOVI.NET

WWW.MATURSKI.NET

WWW.SEMINARSKIRAD.INFO

WWW.MATURSKI.ORG

WWW.ESSAYSX.COM

WWW.FACEBOOK.COM/DIPLOMSKIRADOVI

NA NAŠIM SAJTOVIMA MOŽETE PRONAĆI SVE, BILO DA JE TO [SEMINARSKI](#), [DIPLOMSKI](#) ILI [MATURSKI](#) RAD, POWERPOINT PREZENTACIJA I DRUGI EDUKATIVNI MATERIJAL. ZA RAZLIKU OD OSTALIH MI VAM PRUŽAMO DA POGLEDATE SVAKI RAD, NJEGOV SADRŽAJ I PRVE TRI STRANE TAKO DA MOŽETE TAČNO DA ODABERETE ONO ŠTO VAM U POTPUNOSTI ODGOVARA. U BAZI SE NALAZE [GOTOVI SEMINARSKI, DIPLOMSKI I MATURSKI RADOVI](#) KOJE MOŽETE SKINUTI I UZ NJIHOVU POMOĆ NAPRAVITI JEDINSTVEN I UNIKATAN RAD. AKO U [BAZI](#) NE NAĐETE RAD KOJI VAM JE POTREBAN, U SVAKOM MOMENTU MOŽETE NARUČITI DA VAM SE IZRADI NOVI, UNIKATAN SEMINARSKI ILI NEKI DRUGI RAD RAD NA LINKU [IZRADA RADOVA](#). PITANJA I ODGOVORE MOŽETE DOBITI NA NAŠEM [FORUMU](#) ILI NA MATURSKIRADOVI.NET@GMAIL.COM