

**GIMNAZIJA IVANA ZAKMARDIJA DIJANKOVEČKOGA
KRIŽEVCI**

**MATURALNI RAD
NA MATURI U LJETNOM ROKU ŠKOLSKE GODINE 20xx./20xx.**

Brownovo gibanje

Mentor

Xxxxx XXXXXXX, prof.

Maturant

Xxxxx XXXXX

Križevci, svibanj, 20xx.

Sadržaj:

1. Uvod	3.
2. Povijest	4.
2.1. Robert Brown	4.
2.2. Razdoblje prije Einsteina	4.
2.3. Albert Einstein	6.
3. Brownovo gibanje kao fizikalni model	7.
4. Matematički model Brownovog gibanja	9.
4.1. Teorija kaosa	11.
4.2. Fraktali	13.
4.3. Primjena matematičkog modela Brownovog gibanja	15.
5. Zaključak	16.
6. Literatura	17.

1. Uvod

Brownovo gibanje kao fizikalna pojava je neuređeno termičko gibanje makroskopskih čestica u plinovima ili tekućinama kao posljedica sudara molekula tog medija sa promatranim makroskopskim česticama. Konkretno: promatramo li pod mikroskopom peludna zrnca u vodi, primijetiti ćemo da se ona gibaju bez nekakvog reda i pravilne putanje. Taj fenomen je dobio ime po škotskom botaničaru Robertu Brownu koji ga je prvi sustavno proučavao, opisao i postavio kao fizikalni problem. Većina nas je čula za Brownovo gibanje kao jedno od najbitnijih dokaza atomarnosti tvari, ali ono ima puno šire značenje koje nas se dotiče i u svakodnevnom životu.

Brownovo gibanje je bilo samo neobjašnjeni fizikalni fenomen, sve dok ga Einstein 1905. godine nije objasnio i razvio matematički model, koji je bio preteča današnjoj statističkoj matematici, teoriji kaosa, te prirodi fraktala. Einsteinova relacija govori koliki je put prešla makroskopska čestica u vremenu s obzirom na temperaturu i viskoznost medija u kojeg je uronjena, te same njezine veličine od početnog položaja. Na prvi pogled, takva relacija nam se čini gotovo nemoguća za jedan takav krajnje kompleksan i nepredvidiv sustav u kojem imamo 10^{23} molekula, ali ćemo ovdje prikazati da je ipak moguća.

Iako je težište cijele radnje na samom matematičkom modelu Brownovog gibanja i njegovoj primjeni u tehnologiji, ekonomiji i znanostima, obrađen je ukratko i fizikalni model koji je vezan samo za istoimenu pojavu u prirodi.

2. Povijest

Iako Robert Brown nije prvi koji je uočio fizikalni fenomen nasumičnog gibanja makroskopskih čestica u tekućinama (istraživači su ga uočavali još od doba otkrića mikroskopa), on je prvi koji ga je opisao i detaljno proučio, te dao prve teorije o tome, pa po njemu i sama pojava nosi ime. Einstein je dao točnu teoriju i matematički model Brownovog gibanja, a Perrin ga je eksperimentalno dokazao.

2.1. Robert Brown

Najsretniji je onaj koji ima moć skupljati znanje iz cvijeta — Mary Howitt (1799 - 1888)

Robert Brown rođen je u Montroseu, Škotska, 21. prosinca 1773. godine u bogatoj obitelji koja mu je omogućila kvalitetno školovanje. Nakon završenog studija medicine posvetio se znanstvenom radu i to uglavnom s područja botanike. 18. svibnja 1801. godine, s priznatim botaničarom Sir Joseph Banksom, krenuo je na istraživačko putovanje u Australiju. U Australiji su sakupili više od 4000 različitih vrsta bilja. Nakon povratka u Englesku, tokom 5 godina proučavanja sakupljene kolekcije, opisao je 2200 vrsta bilja, od kojih je 1700 bilo potpuno nepoznato tadašnjoj zapadnoj civilizaciji.

Tokom tih istraživanja mikroskopom je uočio da se pojedina zrnca cvjetne peludi gibaju u vodi bez reda u svim smjerovima. Mislio je da je to zbog života skrivenog u peludnim zrnima. Međutim, pokus je ponovio s mrtvim stanicama peludi i sigurno neživim zrnima boje, stakla, granita i dobio isto kaotično gibanje. Iako nije otkrio uzrok tomu, takvo gibanje je dobilo naziv Brownovo gibanje, jer ga je on prvi stvarno proučio i sustavno opisao, te ga postavio kao bitan fizikalni fenomen, prisutan kod anorganskih, isto kao i kod organskih tvari.

Bio je izabran za predsjednika Kraljevskog Društva 1810. godine, 1822. postao je član Lineovog Društva, a od 1849. do 1853. i predsjednik istog. Umro je u Londonu 10. svibnja 1858.

2.2. Razdoblje prije Einsteina

Nakon 1860. mnogo je znanstvenika radilo na objašnjenju tog fenomena, a svoje teorije su temeljili na električnim efektima, napetosti površine ili razlikama temperature na mikroskali. Međutim ni jedna od nastalih hipoteza nije zadovoljila sve rezultate Brownovih

eksperimenata. Wiener je 1863. godine, a malo poslije i Carbonelle postavio tezu koja je bila blizu današnjoj teoriji: da unutrašnja kretanja same tekućine, koja su uzrok i toplini tekućine, uzrokuju Brownovo gibanje. „*U slučaju da površina tekućine zauzima dovoljno velik prostor, sudari molekula tekućine koji uzrokuju tlak, ne bi uzrokovali nikakvo kretanje uronjenih čestica, zato što tada medij dotiče čestice sa svih strana podjednako. Ali ako je površina manja nego što je potrebno da se kompenziraju nepravilnosti, neuravnotežen tlak se neprestano mijenja od mjesta do mjesta. To mora biti prepoznato kao zakon velikih brojeva koji više ne vodi jednakosti, te će rezultat biti različit od nule i čestice će stalno mijenjati intenzitet i smjer. Nadalje, nejednakosti će biti sve vidljivije što je tijelo manje i u nekim slučajevima, tokom vremena će oscilacije postati sve aktivnije i brže.*“^[1]

Léon Gouy je krajem stoljeća također zaključio da kretanja dolaze od termalnih fluktuacija tekućina i postavio slijedeće činjenice:

1. Kretanje je potpuno neuobičajeno, sastoji se od translacija i rotacija, te trajektorije nemaju određen pravac
2. Dvije čestice se gibaju potpuno neovisno jedna o drugoj, pa čak kada su si bliže od svojih radijusa
3. Gibanje je aktivnije kod manjih čestica
4. Sastav i gustoća čestice nemaju nikakvog utjecaja
5. Gibanje je aktivnije u manje viskoznim tekućinama
6. Gibanje je aktivnije pri višim temperaturama tekućine
7. Gibanje nikada ne prestaje.^[2]

Tih sedam činjenica je opovrgavalo većinu tadašnjih teorija, ali se 1905. godine pojavila kinetička teorija koja govori da je kretanje čestica uzrokovano bombardiranjem istih molekulama fluida. Gornjih 7 činjenica nije bilo u konfliktu s tom teorijom, ali ni ona nije bila lako prihvaćena zbog tadašnjeg shvaćanja fizike: *Interpretacija ranih eksperimenata je bila temeljena na pretpostavci kontinuirane krivulje gibanja koja se uklapa u koncept svijeta kontinuirane materije koji je vladao fizikom 19. stoljeća. Pojave poput elektromagnetizma i širenja topline u tijelima su bile opisane moćnim pojmovnim aparatom – diferencijalnim jednadžbama. Difuzija je također bila opisana kontinuiranim diferencijalnim jednadžbama (poznate kao Fickovi zakoni po njemačkom patologu Adolfu Ficku). Krajem stoljeća Ludwig Boltzmann je razvio kinetičku teoriju plinova koja se zasnivala na pretpostavci o diskontinuiranoj materiji – tj. atomima. Teorija je mogla objasniti rezultate u termodinamici, ali ju je velik broj fizičara uzimao kao eksperimentalno neprovjerljivu hipotezu. Fizika 19.*

^[1] [Nelson01], str. 9

^[2] [Nelson01], str. 10

stoljeća se tako našla u filozofskom procjepu između „kontinuiranog“ i „diskretnog“ objašnjenja svijeta – dva i pol tisućljeća nakon Demokritove ideje o atomima.^[3]

2.3. Albert Einstein

Einstein, unatoč velikom trudu kojeg je uložio u proučavanje Brownovog gibanja, isprva nije bio svjestan postojanja tog fenomena. On ga je previdio teoretski i formulirao točnu brojčanu jednadžbu u radu *„O zahtjevima molekularno-kinetičke teorije topline na gibanje čestica raspršenih u stacionarnoj tekućini“* (to je bilo 1905. godine, iste godine kad je „izumio“ foton i postavio specijalnu teoriju relativnosti). Sam je rekao: *„Ne upoznat sa ranijim istraživanjima Boltzmann i Gibbsa, koja su se pojavila ranije i zapravo iscrpila temu, razvio sam statističku mehaniku i molekularno-kinetičku teoriju termodinamike koja je bila utemeljena na prethodnoj. Moj glavni cilj leži u tome da nađem činjenice koje bi garantirale, koliko god je to moguće, postojanje atoma definirane krajnje veličine. Uslijed toga sam otkrio da bi, prema atomističkoj teoriji, trebalo postojati kretanje mikroskopskih čestica u suspenziji otvoreno za proučavanje, bez znanja da se promatranja odnose na Brownovo gibanje, koje je već odavno poznato.“*^[4]

Einstein je tako, prvo, razvio matematički model koji mu dopušta da predvidi gibanje Brownove čestice. S fizikalne strane je povezao viskoznost i difuziju, što je omogućilo mjerenje Boltzmannove konstante k i Avogardovog broja N_A . Iako je sam problem već bio kvalitativno riješen (znalo se što sve utječe na gibanje čestice), Einstein je dao i kvantitativnu formulaciju.

Konačnu potvrdu Einsteinove relacije je napravio Jean Baptiste Perrin sa suradnicima u nizu eksperimenata između 1908. i 1911. godine, za što je 1926. godine dobio Nobelovu nagradu. Eksperimenti su zahtijevali precizno određivanje veličine kuglica, kontrole njihovog polumjera i velik broj mjerenja. Preciznost njegovih eksperimenata nije ostavila prostora za sumnju u točnost Einsteinovih predviđanja i u diskretnu sliku svijeta baziranu na atomima. Iako su specijalna teorija relativnosti i fotoelektrični efekt po mnogima glavne ideje koje je Einstein dao, te 1905. godine, Brownovo gibanje i matematički model nasumičnog šetača su postavili temelj današnjoj statističkoj fizici.

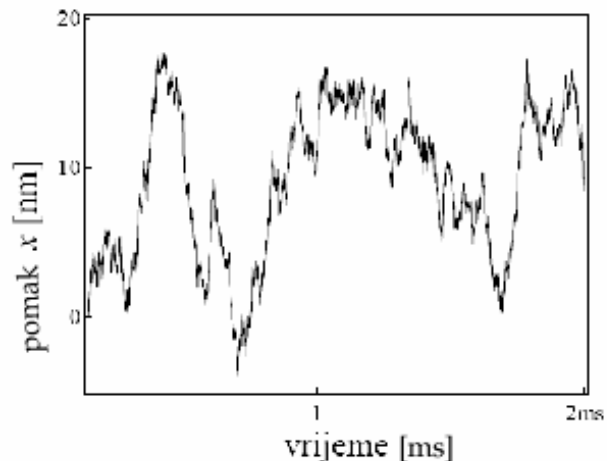
^[3] [Lukic05], str. 77

^[4] [Nelson01], str. 13

3. Brownovo gibanje kao fizikalni model

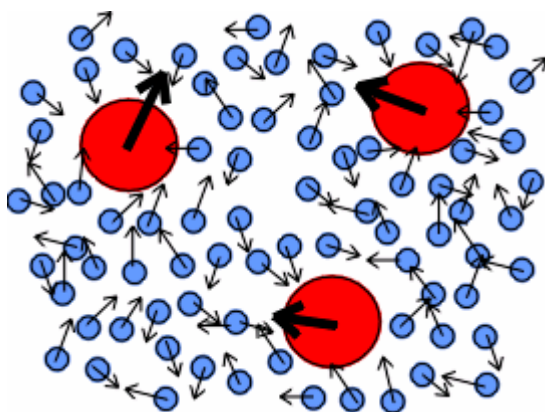
Neka čestica, reda veličine mikrometra, će se pri sobnoj temperaturi u nekoj tekućini gibati nasumično. Možemo to lako zamisliti kao nogometnu utakmicu na kojoj gledamo kako se lopta kreće, ali ne zamjećujemo igrače, ili kao pijanca koji tetura u mraku sa upaljenom svjetiljkom.

Napravimo graf puta kojeg je prevalila čestica u nekom vremenu (slika 1.). Dobivenu krivulju nije lako opisati jer nije kontinuirana i svaki put kad bi je iznova crtali izgledala bi drugačije.



Slika 1. [Lukic05]

Vratimo se na sam fizikalni proces. Koje sve sile djeluju na česticu uronjenu u vodu? Molekule vode se stalno sudaraju o stjenke promatrane čestice (slika 2.) i prenose joj kinetičku energiju, ali na česticu u gibanju djeluje sila trenja tekućine, tj. viskoznost. Kinetička energija čestice (napisana u obliku umnoška mase i akceleracije) jednaka je zbroju vanjske sile molekula koje se sudaraju s česticom i sili trenja (sila trenja je jednaka umnošku koeficijentu trenja, γ i brzine čestice):



Slika 2. [Wiki]

$$ma = F_{tr} + F_v = -\gamma v + F_v \quad (\text{f.3.1.})$$

Viskoznost je konstantna veličina, pa nam preostaje da nasumičnost uzrokuje vanjska sila. Svaka molekula vode ima neku kinetičku energiju, pa prema tome i količinu gibanja, a pri svakom sudaru molekule vode s česticom vrijedi zakon očuvanja količine gibanja i momenta gibanja. Stoga možemo izračunati smjer i količinu gibanja čestice nakon sudara, ali broj molekula vode koji uzimamo u obzir je reda

veličine 10^{23} pa moramo tražiti drugačiji pristup ovom problemu.

Kad povisimo temperaturu fluida, kinetička energija molekula se poveća i one se gibaju brže, a pošto se uronjena čestica nalazi u termalnoj ravnoteži sa medijem, njezina kinetička energija je također proporcionalna sa temperaturom:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kT \quad (\text{f.3.2.})$$

gdje je m masa čestice, v^2 uvijek pozitivan kvadrat prosječne brzine, k konstanta (Boltzmannova konstanta) i T temperatura medija. Iz toga proizlazi da je brzina čestice:

$$v^2 = \frac{kT}{m} \quad (\text{f.3.3.})$$

Iz f.3.3. Einstein je izveo svoju relaciju na ideji statičke mehanike, a sama relacija izračunava kvadrat udaljenosti od početnog položaja:

$$\overline{x^2}(t) = \frac{R \cdot T}{3a\eta N_A} \cdot t \quad (\text{f.3.2.})$$

$\overline{x^2}$ - kvadrat udaljenosti u ovisnosti o vremenu
 R – opća plinska konstanta
 T – temperatura
 a – radijus čestice
 η – viskoznost fluida
 N_A - Avogardov broj
 t - vrijeme

Iz dane relacije vidimo da je udaljenost proporcionalna sa temperaturom, a obrnuto proporcionalna sa radijusom čestice i viskoznosti medija. Upravo zbog veličine čestice ne primjećujemo da se ptice, ribe ili brodovi gibaju po Brownovom gibanju.

4. Matematički model Brownovog gibanja

Matematički model Brownovog gibanja se zove još i nasumični šetač. Kao najjednostavniji primjer uzet ćemo jednodimenzionalnog nasumičnog šetača. Simulaciju istog možemo napraviti na slijedeći način: postavimo neku figuricu na nulu, ishodište brojevnog pravca koji se prostire i u pozitivnom i u negativnom smjeru. Bacamo novčić: ako nam se okrene glava pomičemo figuricu za jedno mjesto u desno, +1 (tj. pozitivni smjer), ako dobijemo pismo pomičemo figuricu u negativni smjer, -1.

$$x_1 = \pm 1 \quad (\text{f.4.2.})$$

Nakon izvjesnog broja bacanja novčića i ponavljanja pokusa figurica će nam u prosjeku svih završnih pozicija izvedenih pokusa iznositi 0, tj. figurica će biti u prosjeku na početnoj poziciji, tj. ishodištu:

$$\overline{x_n} = 0 \quad (\text{f.4.3.})$$

Prosjeak kvadrata udaljenosti od ishodišta uvijek je pozitivan broj:

$$\overline{x_1^2} = 1 \quad (\text{f.4.4.})$$

Drugi korak pokusa:

$$x_2 = x_1 \pm 1 \quad (\text{f.4.5.})$$

Kvadriranjem gornjeg izraza dobivamo da je kvadrat udaljenosti nakon drugog koraka:

$$x_2^2 = x_1^2 \pm 2 \cdot x_1 + 1 \quad (\text{f.4.6.})$$

što je uprosječeno:

$$\overline{x_2^2} = \overline{x_1^2} \pm 2 \cdot \overline{x_1} + 1 \quad (\text{f.4.7.})$$

Pa vrijedi iz (f.4.3.) $\pm 2 \cdot \overline{x_1} = 0$, jednadžbu (f.4.6.) možemo napisati kao:

$$\overline{x_2^2} = \overline{x_1^2} + 1 = 1 + 1 = 2 \quad (\text{f.4.8.})$$

Primijenimo li (f.4.8.) na daljnje korake kao rekursivnu relaciju:

$$\overline{x_N^2} = \overline{x_{N-1}^2} + 1 \quad (\text{f.4.9.})$$

Dobivamo opći oblik koji govori da je broj izvedenih pokusa jednak kvadratu udaljenosti od polazišta:

$$\overline{x_N^2} = N \quad (\text{f.4.10.})$$

Dokaz matematičkom indukcijom:

Pretpostavka je (f.4.10.), baza je (f.4.4.)

Korak indukcije: $x_N = x_{N-1} \pm 1 \mid^2$

$$x_N^2 = x_{N-1}^2 \pm 2 \cdot x_{n-1} + 1$$

$$\overline{x_N^2} = \overline{x_{N-1}^2} \pm 2 \cdot \overline{x_{N-1}} + 1$$

$$\overline{x_N^2} = N - 1 + 1$$

$$\overline{x_N^2} = N \quad (\text{f.4.10.})$$

U fizikalnom modelu Brownovog gibanja upotrebljava se trodimenzionalni nasumični šetač koji je potpuno analogan jednodimenzionalnom, a vrijeme je zamijenilo N, tj. broj udara molekula u česticu, što je ekvivalent Einsteinovoj relaciji (koja je izvedena diferencijalnim računom):

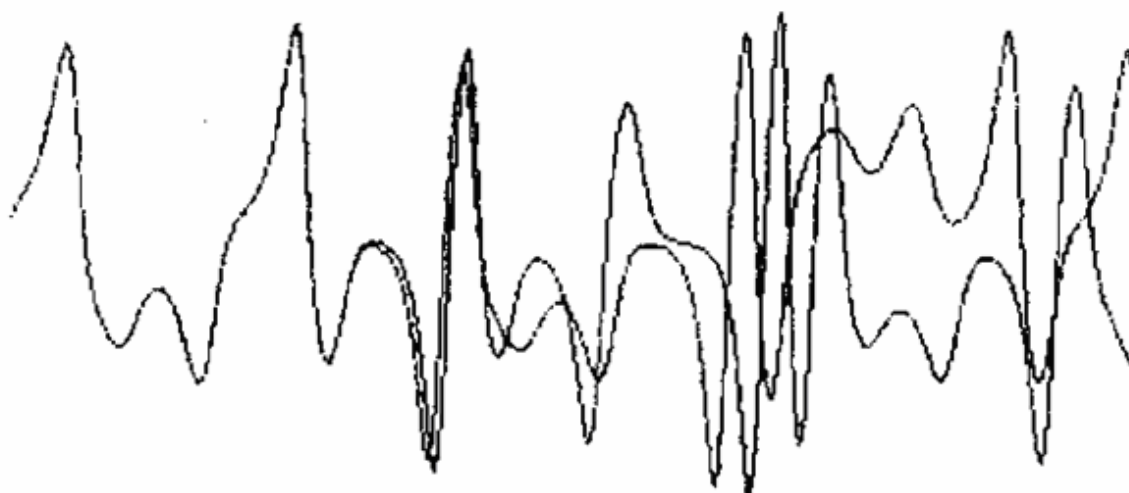
$$\overline{x^2}(t) = \frac{R \cdot T}{3r\eta N_A} \cdot t \quad (\text{f.3.2.})$$

Brownovo gibanje spada u stohastične procese (stohastički dolazi od grčke riječi stohastikos, što znači vješt u pogađanju, naslućivanju) kojima se bavi statistička matematika i teorija kaosa, a sam graf Brownovog gibanja se može opisati fraktalima (koji su u direktnoj vezi sa teorijom kaosa).

4.1 Teorija kaosa

Znanstvenici su u prošlosti uvijek tražili formule i matematičke modele koji im egzaktno mogu dati rezultate nekog procesa, tj. predvidjeti slijedeće stanje nekog sustava u budućnosti – takav sustav je bio determiniran. To je bilo moguće kod sustava s malo varijabli, malo stupnjeva slobode: znajući početne vrijednosti varijabli koje su potrebne u nekoj jednadžbi možemo dobiti točno rješenje te jednadžbe. Međutim, većina sustava u prirodi ima jako puno ulaznih varijabli i velike stupnjeve slobode koje su znanstvenici pojednostavnjivali (ignorirajući neke faktore i efekte) ili su ih jednostavno izbjegavali zbog kompleksnosti njihovog računa (kojeg čak ni današnja računala ne mogu izračunati).

Uzmimo na primjer: vrijeme (ponašanje atmosfere), vrtloženje fluida, kretanje vrijednosti dionica, promijene populacije na nekom području, ... ali i neki jednostavni sustavi su također pokazivali nepredvidivost i kompleksnost, kao npr. problem 3 tijela. Poznati francuski matematičar Pierre Simmon de Laplace početkom 19. stoljeća je tvrdio da ako znamo položaj i brzinu svake čestice u svemiru možemo odrediti točno kako će se cijeli svemir ponašati u budućnosti. Međutim, francuski znanstvenik Henry Poincaré (kraj 19. stoljeća) se suprotstavlja tom determinizmu i govori da bi takvo predviđanje budućnosti svemira bilo moguće samo u narednom vrlo bliskom trenutku, a daljnji razvoj tog sustava (svemira) generira sve više pogrešaka, te je nemoguće predvidjeti njegovo daljnje ponašanje.



Lorentsov eksperiment: razlika između ove dvije krivulje na početku je samo 0.00127 (Ian Stewart, Kocka li se Bog? Matematika kaosa, str. 141)

Slika 3. [Stewart89]

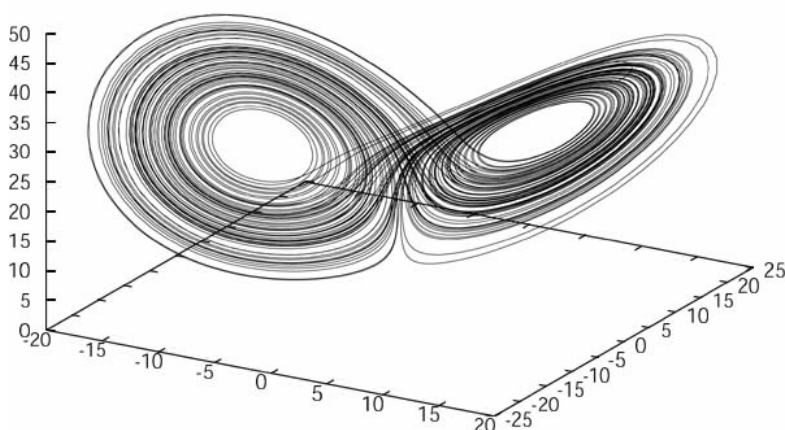
Edward Lorenz, meteorolog, 1961. godine je proučavao jednostavnu simulaciju vremena na svom računalu. U jednom trenutku je prekinuo simulaciju i zapisao trenutne vrijednosti varijabli na 3 decimale (iako je računalo radilo sa 6 decimala). Kad je poslije

nastavio tu simulaciju (unijevši zapisane varijable), simulacija se razvila u potpuno drugom smjeru od one koju je prekinuo (slika 3.). Zaključio je da samo male promijene početnih vrijednosti varijabli mogu dovesti do potpuno drugačijih rezultata.

Teorija kaosa opisuje ponašanje nekog nelinearnog dinamičkog sustava koji pod određenim uvjetima izvodi fenomen poznat kao kaos.

Karakteristike kaotičnog sustava su:

- osjetljivost na početne uvjete, tzv. efekt leptira (*butterfly effect*): „Danas, mahanje krila leptira može prouzročiti male promjene u atmosferi. Nakon nekog vremena te male promjene se mogu razviti u nešto sasvim drugo, od onoga što je trebalo biti. Pa tako, u roku mjesec dana, tornado što bi uništio obalu Indonezije, ne bi se dogodio. Ili možda, jedan koji se ne bi dogodio, ipak se dogodi.“^[5];
- kaotičan sustav će s vremenom popuniti sav dostupan prostor (trajektorije sustava iscrtaju sav dostupan prostor i nikad se ne ponavljaju);
- periodične orbite sustava su jako guste (nema prevelikih odstupanja od prethodne putanje).



Slika 4. [Wiki]

Bitno je da se takvi sustavi uvijek vraćaju, privlače nekim stabilnim vrijednostima – te stabilne vrijednosti se zovu atraktori. Atraktor, geometrijski može biti točka, pravac, krivulja, a neki čak nemaju definiran jasan oblik, nego su fraktalne strukture – to su tzv. čudni atraktori (eng. *strange*

attractors). Najpoznatiji je Lorentzov atraktor koji je ujedno i „zaštitni znak“ istraživača kaosa (Slika 4.). Valja primijetiti da putanja nikad ne presijeca samu sebe.

Teoriju kaosa možemo podijeliti na područje determinističkog kaosa i na područje kvantno-mehaničkog kaosa. Brownovo gibanje spada baš u kvantno-mehanički kaos, tj. u stohastičke procese, a kod takvih procesa se primjenjuju zakoni vjerojatnosti, što više ne spada u domenu determinizma. Sva moguća rješenja tih procesa popunjavaju vjerojatnosni prostor, jer vrijednost idućeg broja je potpuno neovisna o vrijednosti prethodnog. Karakteristika tih procesa je velik broj slučajnih varijabli, čije su veze toliko složene da ih je

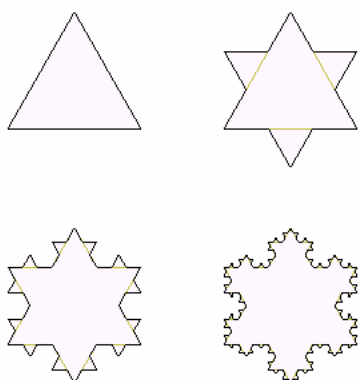
^[5] [Stewart89], str. 141

nemoguće izraziti analitički. Dok se procesi koji spadaju u deterministički kaos mogu opisati, oni iz kvantno-mehaničkog se nikako ne mogu opisati nekom jednačbom, već samo vjerojatnosnim izrazom. Primjeri determinističkog kosa su populacijska jednačba, jednostavno njihalo, a primjeri stohastičkih procesa, osim Brownovog gibanja, spada bacanje igračih kockica, atmosferske promijene, dim cigarete, difuzija, itd.

4.2. Fraktali

Koncept fraktala je prvi uveo 1975. godine IBM-ov istraživač Benoit B. Mandelbrot. Fraktal (dolazi od latinskog *fractus* – razlomljen, slomljen) je definirao kao bilo koju krivulju ili površinu koja je neovisna o skali i čija dimenzija strogo premašuje topološku dimenziju. Neovisnost o skali se odnosi na samosličnost: ako bilo koji dio takve krivulje povećamo dobit ćemo uzorak koji je isti (geometrijska samosličnost) ili sličan (statistička samosličnost) cijeloj krivulji. Fraktalne slike se mogu generirati s 3 tehnike:

- iteracijom – upornim uzastopnim ponavljanjem nekog računskog ili geometrijskog postupka (primjeri: Cantorov skup, Kochova pahuljica, Sierpinski parket, ...)
- rekurzivnom relacijom koju iscrtavano u prostoru (primjeri: Mandelbrotov skup, Lyapunov fraktal, ...)
- stohastičnim procesom kao što je Brownovo gibanje (primjeri: obala mora, pluća, krošnje drveća, Brownovo drvo, Lévy-ov let, ...)



Slika 5. [Wiki]

Kao jedan od najpoznatijih fraktala možemo uzeti Kochovu pahuljicu (izmislio ju je švedski matematičar Niels Fabian Helge von Koch). Nastaje tako da uzmemo jednakostraničan trokut, svaku stranicu trokuta podijelimo na 3 jednaka dijela, te umjesto središnjeg dijela stranice postavimo ponovno jednakostraničan trokut (bez baze). Postupak ponavljamo u nedogled za svaku nastalu dužinu (slika 5.).

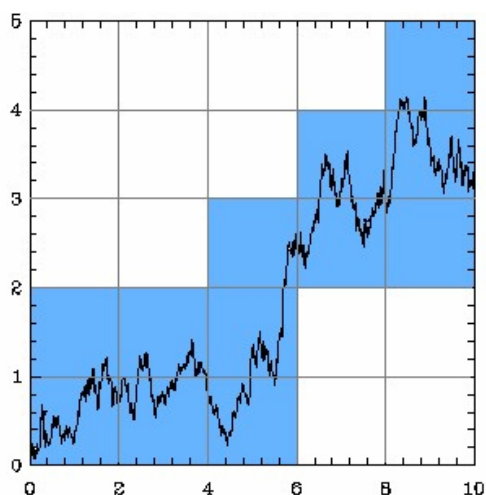
Još jedna od glavnih karakteristika fraktala je što ne moraju imati cjelobrojni broj dimenzija, za razliku od euklidske dimenzije. Euklidska dimenzija govori koliku slobodu ima određeno tijelo: točka ima 0D, crta 1D, lik 2D, tijelo 3D, hipertijelo 4D, ... Dok fraktal kao Kochova krivulja (pahuljica) ima 1.26185... D. Možemo usporediti euklidsku crtu koja ne zauzima prostor i Kochova krivulju koja s beskonačnom duljinom ispunjava konačnu površinu, tj.

ispunjava prostor. Opća formula za određivanje dimenzije fraktala (vrijedi naravno i za euklidska tijela) je:

$$D = -\frac{\ln N}{\ln r} \quad (\text{f.4.9.})$$

gdje je r omjer između veličine segmenta i veličine cijelog objekta, a N ukupan broj segmenata na koje je objekt podijeljen. Prema tome dimenzija euklidskog kvadrata (ako mu stranicu podijelimo na 5, kao primjer) je $D = -\ln 5^2 / \ln (1/5) = 2$, dok je dimenzija Kochove krivulje $D = -\ln 4 / \ln (1/3) = 1.26185...$

Kod računanja dimenzija fraktala nastalih stohastičkim procesima pristupamo drugačijim tehnikama, jer takvi fraktali niti u jednom svom dijelu nisu potpuno istovjetni nekom drugom dijelu na bilo kojoj skali, ali su slični. Jedna od jednostavnijih tehnika je *box counting* dimenzija: fraktal aproksimiramo pravilnim „kockama“. Tako možemo uzeti fraktal nastao Brownovim gibanjem, te ga podijeliti na polja, mrežu. Omjer duljine jedne stranice



Slika 6.

kvadrata mreže i ukupne duljine površine što je zauzima fraktal je r , dok je N broj kvadrata koji sadrže barem neki dio fraktala. Izračunajmo dimenziju fraktala Brownovog gibanja na primjeru (slika 6.): $r = 1/5$ - rezolucija, $N = 12$ - broj plavih kvadrata unutar kojih se nalazi krivulja

$$D = -\frac{\ln 12}{\ln(1/5)} = 1.5439...$$

Precizniji rezultat dobijemo što uzmemo višu rezoluciju (gušću mrežu), inače je točan rezultat $1.5D$ za fraktal Brownovog gibanja. Sad smo pokazali kako se može jedan potpuno kaotičan

sustav, kao Brownovo gibanje, pomoću fraktala svesti na jednostavnu formulu f.4.9.

Fraktali se nalaze svugdje oko nas, te se pretpostavlja da je cijeli svemir jedan fraktal, a u prirodi se može naći beskonačno mnogo primjera fraktala. Fraktali su oblaci, krošnje drveća, obale mora, ljudska pluća, površine, planine, razni procesi u prirodi, itd.

Oblaci nisu sfere, planine nisu stošci, obale mora nisu krugovi, i krošnje drveća nisu glatke, niti svijetlo putuje po ravnoj liniji. - Benoit Mandelbrot

Fraktalna geometrija nije samo jedno poglavlje matematike, već ona pomaže svima da vide svijet drugačije. - Benoit Mandelbrot

4.3. Primjena matematičkog modela Brownovog gibanja

Matematički model Brownovog gibanja se koristi svugdje oko nas iako mi toga nismo niti svjesni: od medicine, ekonomije, robotike, računalnih algoritama, pa sve do proizvodnje, predviđanje vremena i prirodnih katastrofa, u biokemiji, itd. Navest ćemo neke jednostavnije, radi primjera.

U medicini se sve više koristi kod procesiranja medicinskih slika organa i tkiva nastalih npr. ultrazvukom. Organi pokazuju veliku kompleksnost i ne mogu se lako prepoznati i analizirati upravo zbog svoje fraktalne strukture, ali uz pomoć računalnih algoritama koji se temelje na matematičkom modelu Brownovog gibanja, njihovo prepoznavanje i analiza je moguća.

Brownovo gibanje se koristi kod analize tržišta. Proučavanjem grafikona kretanja cijena dionica, cijena proizvoda i vrijednosti indeksa burzi kroz povijest, može se uočiti fraktalna struktura na koju je moguće primijeniti Brownovo gibanje. Tako je moguće odrediti stabilnost, porast ili pad cijena, te pomoću toga optimalno kupovati i prodavati.

Da bi se autonomni roboti kretali moraju dobro znati kako izgleda njihov okoliš. Snimanje cijelog terena u visokoj rezoluciji bi predugo trajalo, pa teren snimljen u maloj rezoluciji, robot rekonstruira u detaljan 3D model pomoću Brownovog gibanja. Osim kod rekonstrukcije terena, robot koristi Brownovo gibanje i pri odabiru putanje svog kretanja.

Poplave i suše donose negativne posljedice na ljudsko gospodarstvo. Faktori o kojima ovise su sastav zemlje, količina padalina, topografski izgled terena, prosječne temperature, pritoci, te vegetacija. Njihovo predviđanje je moguće preko primjene Brownovog gibanja na statističkim podacima skupljenim tokom povijesti, iako to ne garantira sigurnost od takvih prirodnih katastrofa.

5. Zaključak

Kad je Robert Brown prvi puta uočio gibanje peludnih zrnaca pod svojim mikroskopom nije niti slutio kakve će sve posljedice to otkriće donijeti. Sve do Einsteina Brownovo gibanje je bilo samo nerazjašnjeni fizikalni fenomen. Einstein, osim što je dao točnu teoriju Brownovog gibanja, dao je i matematički temelj s kojim se mogu objasniti svi slični nasumični procesi u prirodi i ljudskim djelatnostima. Tada je i konačno potvrđena antička, Demokritova i Leukipova, ideja o atomarnosti tvari.

Sredinom prošlog stoljeća, kad su već svi komentirali kako se znanost razdvaja na sve manje zasebne cjeline, gubeći zajednički smisao, pojavilo se interdisciplinarno područje kojem pripada i Brownovo gibanje – teorija kaosa. Teorija kaosa objašnjava ono što se regularnim i analitičkim putem ne može jednostavno objasniti, a takvi „neobjašnjivi“ procesi se pojavljuju u svim znanostima i ljudskim djelatnostima. Gdje se nalazi elektron u elektronskom omotaču? Kako se kreće populacija zečeva na jednom području? Hoće li se ponoviti slom burze kao „Crni četvrtak“ 1929. godine na Wall Streetu? Kad će doći slijedeći veliki uragan na Floridu? Koja je vjerojatnost da će se okrenuti dvije šestice na igraćim kockicama? Koliko će se trsova vinove loze osušiti poslije zime? Sve su to pitanja na koja, s određenom vjerojatnošću, može odgovoriti teorija kaosa. Promatrajući ponašanje tih naoko nasumičnih procesa može se uočiti periodičnost i fraktalna struktura, te pomoću toga predvidjeti naredno ponašanje promatranog sustava. Teorija kaosa (zajedno sa prirodom fraktala) je jako mlado područje čije vrijeme tek dolazi, a koje će omogućiti znanosti, koja cijela počiva na činjenicama i determinizmu, da istražuje i ona područja na koja se prije nije usudila stupiti zbog prevelike kompleksnosti i nasumičnosti. Teorija kaosa će, pak, kod ljudskih djelatnosti donijeti nove tehnologije, unapređenje današnjih tehnologija, te uvesti ekonomsku sigurnost o kojoj ovisi kapitalistički svijet.

I na kraju, cijeli Svemir se ponaša kaotično, a teorija kaosa nam omogućuje da ga napokon shvatimo, u svojoj pravoj naravi - bez idealiziranja. U svemu tome leži najvažnije značenje Brownovog gibanja. A sve je počelo sa zrcem peludi...

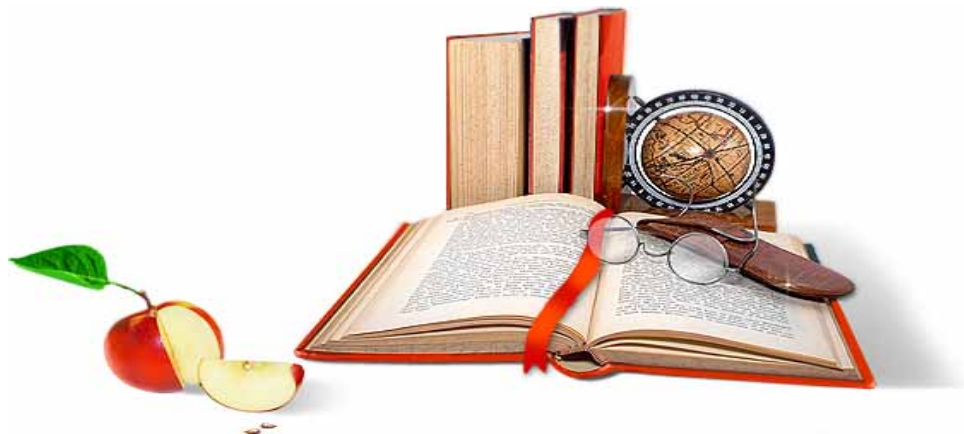
6. Literatura:

- [Bhalerao04] Bhalerao, R.S. *Brownian Motion for the School-Going Child*. Tata Institute of Fundamental Research. Mumbai, India, 2004.
- [Brkovic01] Brković, Nada. *Fizika 4 – udžbenik za 4. razred gimnazije*. Luk d.o.o. Zagreb, 2001.
- [Einstein26] Einstein, Albert. *Investigations on the theory of the Brownian movement*. Dover Publications, inc. SAD, 1926.
- [Eskola] Fraktali – Čudesne slike kaosa,
http://eskola.hfd.hr/mini_projekt/mp7/fraktali_2.htm
- [Hastings93] Hastings, Harold M., George Sugihara. *Fractals: A user's guide for the natural sciences*. Oxford University Press, New York. 1993.
- [IMHO] *Chaos Theory: A Brief Introduction*,
<http://www.imho.com/grae/chaos/chaos.html>
- [Lukic05] Lukić, Branimir. Brownovo gibanje. Zbornik: Ljetna škola mladih fizičara, Labin. Urednik: Antonio Šiber. 2005. ISBN 953717803-X. (73. – 80. str.)
- [Nelson01] Nelson, Edward. *Dynamical Theories of Brownian Motion*. Department of Mathematics, Princeton University, 2001.
- [Stewart89] Stewart, Ian. *Kocka li se Bog? Nova matematika kaosa*. Naklada Jesenski i Turk, Zagreb, 2003.
- [Suprise95] Lee, Y.K., K. Hoon. *Brownian Motion: The Research Goes On...*
http://www.doc.ic.ac.uk/~nd/surprise_95/journal/vol4/ykl/report.html
- [Wiki] *Wikipedia – The Free Encyclopedia*, <http://en.wikipedia.org>

*napomena: sve Internet stranice navedene u literaturi su bile dostupne dan prije predaje rada

BESPLATNI GOTOVI SEMINARSKI, DIPLOMSKI I MATURSKI RAD.

**RADOVI IZ SVIH OBLASTI, POWERPOINT PREZENTACIJE I DRUGI EDUKATIVNI
MATERIJALI.**



WWW.SEMINARSKIRAD.ORG

WWW.MATURSKIRADOVI.NET

WWW.MATURSKI.NET

WWW.SEMINARSKIRAD.INFO

WWW.MATURSKI.ORG

WWW.ESSAYSX.COM

WWW.FACEBOOK.COM/DIPLOMSKIRADOVI

NA NAŠIM SAJTOVIMA MOŽETE PRONAĆI SVE, BILO DA JE TO **[SEMINARSKI](#)**, **[DIPLOMSKI](#)** ILI **[MATURSKI](#)** RAD, POWERPOINT PREZENTACIJA I DRUGI EDUKATIVNI MATERIJAL. ZA RAZLIKU OD OSTALIH MI VAM PRUŽAMO DA POGLEDATE SVAKI RAD, NJEGOV SADRŽAJ I PRVE TRI STRANE TAKO DA MOŽETE TAČNO DA ODABERETE ONO ŠTO VAM U POTPUNOSTI ODGOVARA. U BAZI SE NALAZE **[GOTOVI SEMINARSKI, DIPLOMSKI I MATURSKI RADOVI](#)** KOJE MOŽETE SKINUTI I UZ NJIHOVU POMOĆ NAPRAVITI JEDINSTVEN I UNIKATAN RAD. AKO U **[BAZI](#)** NE NAĐETE RAD KOJI VAM JE POTREBAN, U SVAKOM MOMENTU MOŽETE NARUČITI DA VAM SE IZRADI NOVI, UNIKATAN SEMINARSKI ILI NEKI DRUGI RAD RAD NA LINKU **[IZRADA RADOVA](#)**. PITANJA I ODGOVORE MOŽETE DOBITI NA NAŠEM **[FORUMU](#)** ILI NA **MATURSKIRADOVI.NET@GMAIL.COM**