

MATEMATIČKI FAKULTET

SEMINARSKI RAD

Tema: Aritmetički i geometrijski niz

Student: Maja Nikolić ml03109

Profesor: Zoran Lučić

SADRŽAJ

1.Uvod.....	3
1.1.Osnovni pojmovi.....	4
1.2.Osnovne osobine niza.....	6
1.3.Aritmetički niz.....	8
1.4.Geometrijski niz.....	12
1.5.Razni zadaci.....	16
1.6.Literatura.....	18

1.UVOD

Bilo koje preslikavanje skupa svih prirodnih brojeva N u neki neprazan skup S naziva se niz (elemenata skupa S). Drugim rečima, niz je preslikavanje kojim se:

prirodnom broju 1 dodeljuje njegova slika $a_1 \in S$,

prirodnom broju 2 dodeljuje njegova slika $a_2 \in S$,

$\vdots$

$\vdots$

n

$a_n \in S$,

Uobičajeno je da se niz predstavlja samo svojim slikama, i to u obliku: $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ ili kraće (a_n) .

Za element a_n (koji je slika broja n) često se kaže da je opšti član niza $(a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$.

Napomena: Podsetimo se pojma uređenog para ili uređene dvojke (a_1, a_2) . To je skup od dva elemenata a_1, a_2 , pri čemu se uzima u obzir koji je element prvi, a koji drugi. Zbog toga je, u opštem slučaju, $(a_1, a_2) \neq (a_2, a_1)$, dok je uvek $a_1, a_2 = a_2, a_1$. Slično, uređena trojka (a_1, a_2, a_3) je tročlani skup, pri čemu se uzima u obzir koji je element prvi, koji drugi, a koji treći. U vezi sa tim, niz $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ možemo shvatiti i kao uređenu "beskonačnotorku."

Specijalno, u slučaju $S = R$, preslikavanje skupa N u skup svih realnih brojeva R naziva se realni niz i mi ćemo uglavnom razmatrati takve nizove.

1.1.Osnovni pojmovi

Ograničićemo se na posmatranje beskonačnih nizova, pored ostalog i zbog toga što se, u izvesnom smislu, konačan niz $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ može indentifikovati sa beskonačnim nizom $(a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$. Inače pod beskonačnim realnim nizom podrazumeva se jednoznačno preslikavanje f skupa prirodnih brojeva $N = 1, 2, \dots, n \dots$ u skup realnih brojeva R . (Može se vršiti i preslikavanje skupa N u skup kompleksnih brojeva C , kada govorimo o kompleksnim nizovima.) Kako je skup N oblast definisanosti svakog niza, to je za poznavanje niza f dovoljno (i potrebno) znati vrednosti koje se približavaju brojevima $1, 2, \dots, n, \dots$, tj.

$$a_1 = f(1), a_2 = f(2), \dots, a_n = f(n), \dots,$$

ili bar zakon po kome se te vrednosti formiraju. Na osnovu toga, apostrofiranje nekog niza f može se izvršiti stavljanjem u zagrade njegovih vrednosti $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, kao što smo to na pocetku činili, ili kraćom oznakom $(a_n)_{n=1,2,3,\dots}$.

U ovom tekstu za oznaku niza uzimaćemo često samo (a_n) , implicitno podrazumevajući da n uzima redom sve vrednosti iz skupa N , a takođe i oznaku a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$). (Potpunosti radi, napominjemo da se za oznaku niza ponekad koriste i velike zagrade, npr $\{a_n\}$.)

Vrednosti $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ nazivamo redom *prvim, drugim, ..., n-tim, ...* članom niza (a_n) , a brojeve $1, 2, \dots, n, \dots$ njihovim indeksima. Član (a_n) , tj. član sa neodređenim indeksom n (ili član iz koga variranjem indeksa dobijamo pojedine konkretne članove niza), naziva se često opstim članom niza.

Beskonačni nizovi, u daljem tekstu ove glave: *nizovi*, sreću se često u samoj matematici. Tako nizovi se javljaju i pri desetičnom zapisivanju realnih brojeva. Naime, ako je

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

desetični zapis nekog realnog broja a , onda je

$$a_1, a_2, \dots a_n, \dots$$

niz decimala (decimalnih cifara) tog broja; isto tako,

$$a_0, a_1; a_0, a_1 a_2; a_0, a_1 a_2 \dots a_n; \dots$$

je niz donjih decimalnih aproksimacija (približnih vrednosti) nenegativnog broja a ; U isto vreme

$$a_0, a_1 + \frac{1}{10}; a_0, a_1 a_2 + \frac{1}{10^2}; a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n}; \dots$$

je niz gornjih decimalnih aproksimacija istog broja.

Međutim, nizovi se prirodno pojavljuju i u praksi: njih, npr, čine: brojevi novo pridošlih turista u neki grad (u toku dana, recimo), brojevi proizvedenih artikala u nekoj fabrici (u periodima određene dužine) i slično. Zadavanje niza nekad može biti izvedeno u eksplicitnom obliku, tj. pomoću formule tipa $a_n = f(n)$, koja jasno pokazuje kako se na osnovu vrednosti indeksa n izračunava član niza sa tim indeksom (tj. član a_n).

Primer 1. Niz $a_n = \frac{n[1+(-1)^n]}{2}$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) zadat je u eksplicitnom obliku.

Uzimajući redom $n = 1, 2, 3, \dots$, dobijamo $a_1 = \frac{1(1-1)}{2} = 0$; $a_2 = \frac{2(1+1)}{2} = 2$; $a_3 = \frac{3(1-1)}{2} = 0$; $a_4 = \frac{4(1+1)}{2} = 4$; $\dots$ Međutim, zadavanje nekog niza može biti opisano (usmeno). Tako, ako je a_n gornja decimalna aproksimacija broja $\sqrt{2}$ sa tačnošću do $\frac{1}{10^{n-1}}$, imamo

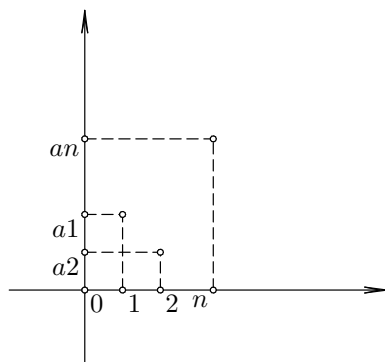
$$a_1 = 2; a_2 = 1, 5; a_3 = 1, 42; a_4 = 1, 415; \dots$$

ili, ako je a_n n -ti po redu prost broj, imamo:

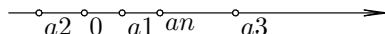
$$a_1 = 2; a_2 = 3; a_3 = 5; a_4 = 7; a_5 = 11; \dots$$

U oba navedena primera nemamo formule koja bi omogućila izračunavanje nekog člana na osnovu vrednosti indeksa n . Uprkos tome, rečima opisano svojstvo članova omogućava da se dođe do vrednosti bilo kog člana tih nizova.

Napomena 1. S obzirom na to da su nizovi funkcije (specifičnog tipa), može se govoriti o njihovim graficima. Na osnovu definicije grafika uopšte, grafik niza (a_n) je skup tačaka (u ravni) $(n, f(n)) \mid n \in N$, tj. skup $(n, a_n) \mid n \in N$ koji je prikazan na slici 1.



Zahvaljujući, međutim, tome da su prve koordinate tačaka na grafiku niza (a_n) uvek iste (tj. redom $1, 2, 3, \dots, n, \dots$), to se dovoljno dobra geometrijska interpretacija niza može dobiti i isticanjem, samo na jednoj brojnoj osi, vrednosti a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) (tj. ordinate tačaka na grafiku niza (a_n)). Takav postupak je češći u praksi i prikazan je na slici 2. Radi razlikovanja, ovako dobijen skup tačaka zvaćemo "grafikom".



1.2. Osnovne osobine nizova

S obzirom na to da su nizovi jedna vrsta funkcija, to se mnogi pojmovi i osobine uvedeni i proučavani kod funkcija uopšte mogu posmatrati i kod nizova posebno. Ovde ćemo apostrofirati dve od tih osobina koje su od izuzetnog značaja i po sebi, a i za dalje izlaganje. Reč je pri ovome o svojstvima *monotonosti* i *ograničenosti* nizova. Iz definicije rastuće funkcije uopšte, sledi da je niz (a_n) rastući ako i samo ako $(\forall m, n \in N)(m > n \Rightarrow a_m > a_n)$. Lako je, međutim videti da je poslednji uslov ispunjen ako je $(\forall n \in N)(a_{n+1} > a_n)$, odnosno ako (i samo ako) je $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$. Ako u predhodnim nejednakostima među članovima niza " $<$ " zamenimo sa " $\leq$ ", dobijamo definiciju neopadajućeg niza (a_n) . Kada želimo da uprostimo izlaganje, rastući niz možemo označiti sa $(a_n) \uparrow$. Postupajući na sličan način, dolazimo do definicije opadajućeg niza (a_n) (tj. niza (a_n) sa osobinom $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$), u oznaci $(a_n) \downarrow$, odnosno do definicije nerastućeg niza (a_n) (tj. niza (a_n) sa osobinom $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots$).

Rastući, neopadajući, opadajući i nerastući nizovi jednim imenom nazivaju se monotoni nizovima, pri čemu se za rastuće i opadajuće nizove kaže da su strogo monotoni nizovi.

Grafik rastućeg niza (a_n) je skup tačaka čije ordinate rastu sa rastom apcisa. Ukoliko se niz (a_n) interpretira na brojevnoj osi,

odgovarajućih članova niza: tačka a_{n+1} je desno od tačke a_n , za svako n . Ako je pak niz a_n neopadajući, na njegovom grafiku mogu postojati uzastopne tačke sa različitim apcismama i jednakim ordinatama. Pri interpretaciji neopadajućeg niza a_n na brojevnoj osi, jedna ista tačka može predstavljati više uzastopnih članova niza.

Napomena 1. Kako je $a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n > 0$, to je a_n rastući niz ako i samo ako $(\forall n \in N)(a_{n+1} - a_n > 0)$. Na isti način, osobina

$$(\forall n \in N)(a_{n+1} - a_n \geq 0)$$

karacteriše neopadajući niz (a_n) , dok su opadajući i nerastujući niz potpuno okarakterisani redom osobinama $(\forall n \in N)(a_{n+1} - a_n < 0)$ i $(\forall n \in N)(a_{n+1} - a_n \leq 0)$.

Primer 1. Ispitati monotonost niza

$$a_n = \frac{3n-1}{n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Rešenje: Prema *napomeni 1*, ispitivanje monotonosti niza (a_n) svodi se na ispitivanje znaka razlike $a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). U našem slučaju, iz

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)-1}{n+1} - \frac{3n-1}{n} = \frac{3n^2 + 2n - 3n^2 - 3n + n + 1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

sledi da je $(\forall n \in N)(a_{n+1} - a_n > 0)$, tj. da je posmatrani niz rasrući.

Iz definicije ograničenosti funkcije uopšte, dobija se sledeća definicija: Niz (a_n) je ograničen ako i samo ako $(\exists m, M \in R)(\forall n \in N)(m \leq a_n \leq M)$. Pri tome se broj m naziva minorantom, a broj M majorantom niza (a_n) . Ako niz (a_n) ima minorantu, onda se on naziva ograničenim odozdo, a ako ima majorantu, naziva se ograničenim odozgo. Očigledno, ograničen niz (a_n) ograničen je i odozdo i odozgo, i obrnuto. Na tom rezultatu temelji se utvrđivanje ograničenosti (odnosno neograničenosti) nekih nizova.

Napomena 2. Utvrđivanje ograničenosti nekih nizova složenije strukture, može se zasnovati na rezultatu: niz (a_n) je ograničen ako i samo ako

$$(\exists k \geq 0)(\forall n \in N)(|a_n| \leq k).$$

Pri tome se često koriste i nejednakosti

$$|a+b| \leq |a| + |b| \text{ i } |a-b| \geq ||a| - |b||.$$

1.3. Aritmetički niz

Realan niz $(a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ naziva se aritmetički niz ako je razlika bilo koja dva susedna (uzastopna) člana toga niza konstanta. Drugim rečima, niz (a_n) je aritmetički ako postoji realan broj d takav da je:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_{n+1} - a_n = d \quad (1)$$

Jednakosti (1) mogu se kraće napisati u obliku:

$$a_{n+1} - a_n = d \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2)$$

Broj d se obično zove razlika (diferencija) aritmetičkog niza (a_n) .

Primerimo da je aritmetički niz (a_n) potpuno određen svojim prvim članom a_1 i razlikom d jer jednakost (2) daje indukcijsku definiciju niza (a_n) . Zaista, pretpostavimo da su poznati prvi član a_1 aritmetičkog niza (a_n) i njegova razlika d . Tada se iz (2) za $n = 1$ dobija a_2 (jer je $a_2 = a_1 + d$), za $n = 2$ dobija se a_3 (jer je $a_3 = a_2 + d$) itd.

U stvari, polazeći od jednakosti (2) nije teško izvesti formulu za opšti član a_n aritmetičkog niza (a_n) .

Naime, iz (2) dobijamo:

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= d \\ a_3 - a_2 &= d \\ &\vdots \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= d \\ a_n - a_{n-1} &= d \end{aligned}$$

odakle, posle sabiranja, izlazi:

$$\begin{aligned} a_n - a_1 &= (n-1)d, \text{ tj.} \\ a_n &= a_1 + (n-1)d \end{aligned} \quad (3)$$

Prema tome, aritmetički niz ili aritmetička progresija ima oblik:

$$(a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots, a_1 + (n-1)d, \dots).$$

Aritmetička progresija je rastuća (diferencija d pozitivna; isti niz je opadajući ako i samo ako je razlika d negativna; ako je pak $d = 0$, onda imamo $a_n = a_1$ za svako $n = 1, 2, 3, \dots$, što znači da su tada svi članovi niza jednaki, u tom slučaju imamo tzv. *niz-konstantu*.

Iz $|a_n| = |a_1 + (n-1)d| \geq |(n-1)d| - a_1 = (n-1)|d| - |a_1|$ za svako $n = 1, 2, 3, \dots$ sledi da je niz $(|a_n|)$ ograničen ako i samo ako je $d = 0$.

Prema tome, aritmetička progresija $(a_1 + (n-1)d)$ je ograničen niz ako i samo ako je $d = 0$, tj. ako ona predstavlja niz-konstantu.

Kako u formuli (3) učestvuju dva proizvoljna "parametra" a_1 i d , zaključujemo da je aritmetički niz potpuno određen ne samo kad su poznati prvi član a_1 i razlika d već kad su poznata bilo koja dva međusobno nezavisna podatka o nizu.

Primer 1. Peti član aritmetičkog niza (a_n) je 19, a deseti član 39. Odrediti niz (a_n) .

Rešenje: Imamo $a_5 = 19, a_{10} = 39$. Međutim, u slučaju aritmetičkog niza jednakost (3) je tačna za svako $n \in N$. Stoga je:

$$a_5 = a_1 + 4d = 19, \text{ i } a_{10} = a_1 + 9d = 39.$$

Iz sistema jednačina $a_1 + 4d = 19$, i $a_1 + 9d = 39$, posle oduzimanja dobijamo $5d = 20$, tj. $d = 4$, pa je $a_1 = 19 - 16 = 3$, i opšti član niza glasi:

$$a_n = 3 + 4(n - 1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \text{ tj.}$$

$$a_n = 4n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Dakle, traženi aritmetički niz je $(3, 7, 11, \dots)$.

Primer 2. Treći član aritmetičkog niza (a_n) četiri puta je veći od prvog, a šesti član je 17. Odrediti niz (a_n) .

Rešenje: Imamo $a_3 = 4a_1$; $a_6 = 17$. Koristeći formulu (3) dobijamo:

$$a_3 = a_1 + 2d = 4a_1,$$

$$a_6 = a_1 + 5d = 17$$

tj. sistem jednačina: $3a_1 - 2d = 0$, $a_1 + 5d = 17$ odakle neposredno sledi $a_1 = 2$, $d = 3$, pa je

$$a_n = 2 + 3(n - 1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

tj. traženi niz glasi $(2, 5, 8, \dots)$.

Niz svih prirodnih brojeva $(n) = (1, 2, 3, \dots, n, \dots)$ čini aritmetički niz (sa prvim članom 1 i razlikom 1). Formula za izračunavanje zbira prvih n prirodnih brojeva, tj. prvih n članova niza $(1, 2, 3, \dots)$ je:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2} .$$

Izvedimo sada formulu za zbir prvih n članova bilo kog aritmetičkog niza (a_n) , tj. izračunajmo vrednost izraza S_n , gde je:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n . \quad (4)$$

Koristeći se jednakošću (3), nalazimo:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n - 1)d)$$

$$= na_1 + d + 2d + \dots + (n - 1)d$$

$$= na_1 + (1 + 2 + \dots + (n-1))d$$

Međutim, na osnovu (4) je:

$$(1 + 2 + \dots + (n-1)) = \frac{n(n-1)}{2}$$

pa dobijamo:

$$\begin{aligned} S_n &= na_1 + \frac{(n-1)nd}{2} \\ S_n &= \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2} \end{aligned} \quad (5)$$

Napomena 1. Formula (5) može se dokazati na sledeći način. Kako je:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

a takođe

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1,$$

na osnovu jednakosti (3) imamo:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1)d)$$

$$S_n = (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-3)d) + \dots + a_1$$

Posle sabiranja redom članova koji su potpisani jedan ispod drugog, dobijamo:

$$2S_n = (2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d) + \dots + (2a_1 + (n-1)d)$$

$$2S_n = n(2a_1 + (n-1)d) \quad \text{tj.} \quad (5).$$

Jednakost (5), napisana u obliku:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + (a_1 + (n-1)d)) \quad .$$

Na osnovu (3) postaje:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad . \quad (6)$$

Primer 3. Odrediti aritmetički niz (a_n) ako je $a_1 = 5, a_p = 45$,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_p = 400.$$

Rešenje: Imamo:

$$S_p = 400 = \frac{p}{2}(a_1 + a_n) = \frac{p}{2}(5 + 45) = 25p,$$

pa je $p = \frac{400}{25} = 16$. Dakle, $a_{16} = 45 = a_1 + 15d = 5 + 15d$, pa je $d = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$. Opšti član traženog niza glasi:

$$a_n = 5 + \frac{8}{3}(n-1) = \frac{1}{3}(8n-7) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) .$$

Primer 4. Koliko članova aritmetičkog niza $(-9, -6, -3, \dots)$ treba sabrati da bi se dobio zbir 66?

Rešenje: Prvi član ovog niza je -9, a razlika je $d = 3$. Kako zbir prvih n članova aritmetičkog niza (a_n) iznosi $\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$, treba odrediti n iz jednačine: $\frac{n}{2}(-18 + 3(n-1)) = 66$ tj. $n^2 - 7n - 44 = 0$.

Ova kvadratna jednačina ima dva rešenja: 11 i -4. Negativno rešenje ne dolazi u obzir, pa zaključujemo da treba sabrati 11 članova datog niza da bi se dobio zbir 66.

Primetimo da je pojam aritmetičke sredine dva broja u vezi sa aritmetičkim nizom. Naime, ako su a, b, c tri uzastopna člana aritmetičkog niza, tada je srednji aritmetička sredina krajnjih, tj. $b = \frac{a+c}{2}$. (7)

Zaista, ako su a, b, c tri uzastopna člana aritmetičkog niza, tada postoji broj d takav da je:

$$\begin{aligned} c - b &= d, & b - a &= d, & \text{tj.} \\ c &= b + d, & a &= b - d, \end{aligned}$$

pa je $a + c = 2b$ odakle odmah izlazi (7).

U vezi sa ovim je i tzv. problem interpolacije kod aritmetičkog niza. Naime, ako između dva broja a i b treba umetnuti (interpolirati) broj x tako da su a, x, b uzastopni članovi aritmetičkog niza, tada je, kao što smo videli,

$$x = \frac{b+a}{2} .$$

Opštiji interpolacioni problem glasi: ako su a i b dva različita broja, umetnuti između njih m brojeva $x_1, x_2, \dots, x_m$ tako da $a, x_1, x_2, \dots, x_m, b$ budu uzastopni članovi aritmetičkog niza. Ovaj problem rešava se na sledeći način.

Brojeve $a, x_1, x_2, \dots, x_m, b$ tim redom, uzimamo za prvih $m+2$ člana aritmetičkog niza $(a_1, a_2, \dots)$. Za taj niz važi:

$$\begin{aligned} a_1 &= a, & a_{m+2} &= b = a + (m+1)d, & \text{tj.} \\ a_1 &= a, & d &= \frac{b-a}{m+1} . \end{aligned}$$

Prema tome, za bilo koji član niza $(a_1, a_2, \dots)$ važi

$$a_n = a + \frac{n-1}{m+1}(b-a) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) .$$

Kako je $x_k = a_k + 1$, $(k = 1, 2, \dots, m)$, zaključujemo da je:

$$x_k = a + \frac{k}{m+1}(b-a) \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

1.4. Geometrijski niz

Pre više stotina godina u Indiji je živio kralj Sirham koji je voleo da igra igre, ali se zasitio starih igara i hteo je nešto sa više izazova. Zatražio je od siromašnog matematičara Sete ben Dahira, koji je živio u njegovom kraljevstvu, da mu izmisli novu igru. Ta nova igra zvala se šah. Kralj se toliko oduševio da je matematičaru za nagradu ponudio šta god poželi. "Zatražio bih da mi na prvo polje šahovske table date jedno zrno pšenice, na drugo dva, na treće četiri, i na svako sledeće polje duplo više zrna pšenice nego na prethodnom polju", rekao je "skromni" matematičar. Kralja je ovaj odgovor uvredio, ali je ipak naredio svojim slugama da matematičaru daju traženu nagradu. Ubrzo je shvatio da u čitavoj Indiji nema dovoljno pšenice da se popune sva polja šahovske table. Broj zrna pšenice nije ništa drugo nego suma prvih 64 člana geometrijske progresije, početnog člana 1 i količnika 2 i ona iznosi 18446744073709551615 (18 kvadriliona 446 triliona 744 biliona 73 milijarde 709 miliona 551 hiljada 615).

Za realan niz $(a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ kažemo da je geometrijski ako je količnik bilo koja dva uzastopna člana toga niza konstantan, tj. ako postoji broj q takav da je:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

ili kraće,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Broj q naziva se količnikom geometrijskog niza. Na osnovu definicionih jednakosti (1), jednostavno se dolazi do formule za opšti član geometrijskog niza. Naime, množeći jednakosti

$$\frac{a_2}{a_1} = q, \frac{a_3}{a_2} = q, \dots, \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = q, \frac{a_n}{a_{n-1}} = q,$$

dobijamo

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \dots \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = q^{n-1},$$

tj.

$$\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1},$$

ili

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Napomena 1. Jednakost (1) podrazumeva da je $a_n \neq 0$ za svako $n = 1, 2, \dots$. Ako se ta jednakost napiše u obliku $a_{n+1} = qa_n$, možemo dopustiti da se u geometrijskom nizu pojave i nule, ali tada se jednostavno pokazuje da u tom slučaju niz postaje $(0, 0, \dots, 0, \dots)$, pa nije interesantan. Kako je

$$a_{n+1} - a_n = a_1 q^n - a_1 q^{n-1} = a_1 q^{n-1}(q - 1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

to za $a_1 > 0$ i $q > 1$ ili $a_1 < 0$ i $0 < q < 1$ geometrijska progresija predstavlja rastući niz, a za $a_1 < 0$ i $q > 1$ ili $a_1 > 0$ i $0 < q < 1$, ona predstavlja opadajući niz; ako je pak $q < 0$ i $a_1 \neq 0$, geometrijska progresija predstavlja niz koji naizmenično menja znak, i koji zbog toga nije ni rastući ni opadajući; u slučaju $a_1 = 0$, geometrijski niz se svodi na niz-konstantu $(0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$; kada je $q = 0$, imamo niz $(a_1, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$, dok za $q = 1$ dobijamo niz-konstantu $(a_1, a_1, \dots, a_1, \dots)$. Što se tiče ograničenosti geometrijske progresije $(a_1 q^{n-1})$, važi iskaz: za $a_1 \neq 0$ geometrijska progresija $(a_1 q^{n-1})$, je ograničen niz ako i samo ako $|q| \leq 1$. Geometrijski niz je potpuno određen poznavanjem dva međusobno nezavisna podatka o njemu; na primer, ako su poznati prvi član i količnik ili dva člana niza itd.

Primer 1. Odrediti geometrijski niz čiji je drugi član 24, a peti 81.

Rešenje: $a_2 = a_1 q = 24$ i $a_5 = a_1 q^4 = 81$, Iz sistema jednačina: $a_1 q = 24$ i $a_1 q^4 = 81$, posle deljenja dobijamo: $q^3 = \frac{81}{24} = \frac{27}{8}$, tj. $q = \frac{3}{2}$. Dalje, iz $a_1 q = 24$ sledi $a_1 = 24 \cdot \frac{2}{3} = 16$. Prema tome, traženi niz glasi: $(16, 24, 36, \dots, 16(\frac{3}{2})^{n-1}, \dots)$.

Izvedimo sada formulu za zbir S_n prvih n članova geometrijskog niza (a_n) . Kako je:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

S obzirom na (2) dobijamo:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1},$$

posle množenja sa q :

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^n,$$

i, najzad posle oduzimanja: $(1 - q)S_n = a_1 - a_1q^n = a_1(1 - q^n)$.

Prema tome, ako je $q \neq 1$, dobijamo:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} . \quad (3)$$

Napomena 2. Ako je $q = 1$, tada iz (2) dobijamo $a_n = a_1$ za svako $n \in N$, pa je geometrijski niz u tim slučaju konstantan i glasi: $(a_1, a_1, \dots, a_1, \dots)$. Zbir prvih n članova ovog niza očigledno je na_1 .

Primer 2. Koliko članova geometrijskog niza $(2, -1, \frac{1}{2}, \dots)$ treba sabrati da bi se dobio zbir $\frac{85}{64}$?

Rešenje: Prvi član datog niza je $a_1 = 2$, a količnik

$$q = \frac{-1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{-1} = -\frac{1}{2} ,$$

pa zbir prvih n članova ovog niza iznosi:

$$S_n = 2 \cdot \frac{1 - (-\frac{1}{2})^n}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{4}{3}(1 - (-\frac{1}{2})^n) .$$

Stoga broj n određujemo iz jednačine:

$$\frac{4}{3}(1 - (-\frac{1}{2})^n) = \frac{85}{64} , \quad \text{tj.} \quad 1 - (-\frac{1}{2})^n = \frac{3}{4} \cdot \frac{85}{64} = \frac{255}{256} ,$$

tj. $(-\frac{1}{2})^n = \frac{1}{256}$, odakle izlazi $n = 8$.

Neka su a, b, c tri uzastopna člana geometrijskog niza. Tada je $\frac{b}{a} = q$, $\frac{c}{b} = q$, tj.

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} , \quad \text{ili} \quad b^2 = ac ,$$

odakle izlazi:

$$|b| = \sqrt{ac} .$$

Prema tome, ako su a, b, c tri uzastopna člana pozitivnog geometrijskog niza (tj. svi članovi niza su pozitivni), onda je srednji član b jednak geometrijskoj sredini krajnjih članova a, c . Obrnuto, ako između dva pozitivna broja a, c treba umetnuti broj b takav da su a, b, c tri uzastopna člana geometrijskog niza, onda je $b = \sqrt{ac}$.

Opšti problem interpolacije kod geometrijskog niza glasi: ako su a, b dva različita pozitivna broja, umetnuti brojeve $x_1, x_2, \dots, x_m$ tako da

$$a, x_1, x_2, \dots, x_m, b$$

budu uzastopni članovi geometrijskog niza. Uzmimo da su $a, x_1, x_2, \dots, x_m, b$ prvih $m + 2$ člana geometrijskog niza $(a_1, a_2, \dots)$. Tada je:

$$a = a_1, \quad b = aq^{m+1},$$

tj.

$$a_1 = a, \quad q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}.$$

Kako je $x_k = a_{k+1}$, $(k = 1, 2, \dots, m)$, dobijamo:

$$x_k = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{m+1}} \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (4)$$

Napomena 3. Zahtev da brojevi a, b budu pozitivni uslovljen je time što treba da postoji koren:

$$\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} \quad (5)$$

Odmah se vidi da a i b ne moraju biti pozitivni, već je dovoljno da budu istog znaka da bi koren (5) postojao za svako m . Takođe, ako je m paran broj, koren (5) postoji bez obzira na znak izraza $\frac{b}{a}$.

Primer 3. Između brojeva 14 i $-\frac{7}{64}$ možemo umetnuti, recimo, šest brojeva $x_1, \dots, x_6$ tako da $14, x_1, \dots, x_6, -\frac{7}{64}$ budu osam uzastopnih članova geometrijskog niza.

Zaista, ovde je $a = 14, b = -\frac{7}{64}, m = 6$, pa iz (4) dobijamo:

$$x_k = 14\left(-\frac{7}{64 \cdot 14}\right)^{\frac{k}{7}} = 14\left(-\frac{1}{128}\right)^{\frac{k}{7}} = 14\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

za $(k = 1, 2, \dots, 6)$. Međutim, ne mogu se umetnuti, recimo pet brojeva $y_1, y_2, \dots, y_5$, tako da $14, y_1, \dots, y_5, -\frac{7}{64}$ budu sedam uzastopnih članova geometrijskog niza.

1.5.Razni zadaci

Zadatak 1. Zbir prva tri člana aritmetičkog niza je 36, a zbir kvadrata prva tri člana je 482. Odrediti niz.

Rešenje 1. Iz uslova zadatka dobijaju se jednakosti:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 36$$

i

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 482$$

Odatle sledi sistem $a_1 + d = 12$ i $3a_1^2 + 5d^2 + 6a_1d = 482$, čija su rešenja $d = \pm 5$, $a_1 = 7$ ili $a_1 = 17$, te je traženi niz

$$7, 12, 17, 22, \dots$$

ili

$$17, 12, 7, 2, -3, -8, \dots$$

Zadatak 2. Za svako n zbir S_n od n članova aritmetičke progresije je $2n + 3n^2$. Koliki je r -ti član progresije?

Rešenje 2. Kako je $S_n = 2n + 3n^2$, r -ti član progresije se može odrediti na sledeći način:

$$a_r = S_r - S_{r-1} = 2r + 3r^2 - (2(r-1) + 3(r-1)^2) = 6r - 1$$

Zadatak 3. Koliko članova ima geometrijski niz, ako je zbir prvog i petog člana 51, zbir drugog i šestog 102, a zbir svih članova 3069?

Rešenje 3. Uslovi su: $b_1 + b_5 = 51$ i $b_2 + b_6 = 102$, odnosno:

$$b_1(1 + q^4) = 51 \quad i \quad b_1q(1 + q^4) = 102.$$

Odavde dobijamo $q = 2$, pa je $b_1 = 3$. Iz $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, dobijamo $1024 = 2^n$, odakle je $n = 10$.

Zadatak 4. Prvi član aritmetičkog niza je 24. Napisati prvih deset članova ovog niza, ako prvi, peti i jedanesti član određuju geometrijsku progresiju.

Rešenje 4. Po uslovu brojevi 24, $24 + 4d$ i $24 + 10d$ čine geometrijsku progresiju, pa je: $(24 + 4d)^2 = 24(24 + 10d)$. Odavde dobijamo jednačinu:

$$16d^2 - 48d = 0,$$

koja daje rešenje $d = 3$. Trazeni brojevi su:

$$24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51.$$

Količnik geometrijske progresije je $q = \frac{3}{2}$.

Zadatak 5. Između -2 i 46 umetnuti 15 brojeva, tako da svi zajedno formiraju aritmetički niz. Koliki je zbir ovih 17 brojeva?

Zadatak 6. Za vrednosti x brojevi $\log 2$, $\log(2^x - 1)$ i $\log(2^x + 3)$ predstavljaju u datom poretku tri uzastopna člana aritmetičkog niza?

Zadatak 7. Između 1 i 256 umetnuti tri broja, tako da svi zajedno čine geometrijski niz.

Zadatak 8. Zbir prva tri člana geometrijskog niza je 91. Ako tim članovima dodamo redom 25, 27 i 1 dobićemo tri broja koji čine aritmetički niz. Odrediti sedmi član datog geometrijskog niza.

Zadatak 9. Aritmetički i geometrijski niz imaju zajednički prvi član broj 2, i zajednički treći član. Drugi članovi im se razlikuju za 4. Odrediti ova tri broja.

1.6.Literatura:

1.Jovan D.Kečkić:Matematika sa zbirkom zadataka za treći razred srednje škole

2.V.T.Bogoslavov:Zbirka rešenih zadataka iz matematike za treći razred gimnazije,1977.Beograd.

3.Dobrolo Đ.Tosić,

Nina D.Stanković:Testovi iz matematike za prijemne ispite

4.Radić M.Vučićević,

Milorad K.Đorđević,

Milivoje G.Lazić,

Ratko R.Nenadović:Matematika za treći razred srednje škole, Naučna knjiga,1980.Beograd.