



**VISOKA POSLOVNA ŠKOLA
STRUKOVNIH STUDIJA
ČAČAK**

MAGISTARSKI RAD

Jonizacija atoma jakim laserskim poljem

Mentor: _____
Profesor: _____

Student: _____
Br.Indeksa: _____

Mesto, mesec, godina

Zahvaljujem svom mentoru prof.Dr.Xxxxx Xxxxx na pomoći koju mi je ukazao
prilikom izrade ovog magistarskog rada

Ovaj magistarski rad sadrži rezultate dva rada koji su objavljeni u referentnom naučnom časopisu:

M. Busuladžić, A. Gazibegović-Busuladžić, and D. B. Milošević, *High-order above-threshold ionization in a laser field: Influence of ionization potential on high-energy cutoff*, Laser Phys. **16**, 289 (2006);

E. Hasović, M. Busuladžić, A. Gazibegović-Busuladžić, D. B. Milošević, and W. Becker, *Simulation of the above-threshold ionization experiments using strong-field approximation*, Laser Phys. **17**, 376 (2007);

kao i rezultate predstavljene na naučnoj konferenciji:

D. B. Milošević, E. Hasović, M. Busuladžić, A. Gazibegović-Busuladžić, A. Čerkić and W. Becker, *Simulation of the above-threshold ionization and detachment experiments using strong-field approximation*, 15th International Laser Physics Workshop (LPHYS'06), Lausanne, Switzerland, July 24-28, 2006, p.107 (2006).

Kratak sadržaj

U ovom magistarskom radu razmotren je proces jonizacije iznad praga. U prvom poglavlju uvedeni su osnovni pojmovi vezani za interakciju atoma i laserskog polja. U drugom poglavlju predstavljeni su razni atomski procesi koji se odigravaju u jakom laserskom polju, dok su u trećem poglavlju detaljno izloženi teorijski pristupi i odgovarajući rezultati vezani za jonizaciju iznad praga. Četvrto poglavlje sadrži nove teorijske rezultate vezane za uticaj jonizacionog potencijala na zakon odsijecanja krajnjeg visokoenergetskog dijela HATI spektra. Proces je analiziran metodom sedlaste tačke u petom poglavlju. Konačno, u posljednjem dijelu ovog magistarskog rada prikazani su ATI spektri, kao i novi rezultati vezani za pojačanje dijela HATI spektra pri zatvaranju odgovarajućih kanala.

Abstract

In this master thesis Above-Threshold Ionization process is considered. Some basic concepts of description of the interaction between atom and laser field are presented in the first chapter. Different atomic processes in a strong laser field are presented in the second chapter, while the third chapter is devoted to detailed theoretical description of ATI. The fourth chapter contains new theoretical results concerning influence of ionization potential on high-energy electron spectra. Analysis of HATI process in the frame of saddle-point method (SPM) approximation is presented in the fifth chapter. Finally, in the last part of this master thesis, ATI spectra was presented, as well as new results related to enhancement of particular part of ATI spectrum near a channel-closing effect.

Sadržaj

Uvod	ix
1 Atom u laserskom polju	1
1.1 Interakcija atoma i laserskog polja	1
1.2 Prijelaz na sistem centra masa i dipolna aproksimacija	6
1.3 Kalibracione transformacije	7
1.4 Volkovljevo rješenje	9
1.5 Mehanizmi jonizacije i Keldyshev parametar	11
2 Atomi procesi u jakom laserskom polju	15
2.1 Elektron-atomsko rasijanje	16
2.2 Generacija viših harmonika	19
2.3 Nesekvencijalna dvostruka jonizacija	25
2.4 Elektron-jonska rekombinacija	31
2.5 Rasijanje X-zraka na atomu u prisustvu laserskog polja	34
3 Jonizacija iznad praga	41
3.1 Eksperimentalne metode	41
3.2 Klasična analiza	42
3.2.1 Direktni elektroni	43
3.2.2 Visokoenergetski elektroni	45
3.3 Kvantno-mehanička analiza	51
3.3.1 Kvantno-mehanički opis direktnih elektrona	53
3.3.2 Interferencija amplituda za direktne elektrone	57
3.3.3 Kvantno-mehanički opis visokoenergetskih elektrona . .	58
3.4 Kvantne orbite	63
3.4.1 Kvantne orbite za linearnu polarizaciju	65
3.4.2 Kvantne orbite za eliptičku polarizaciju	66
3.5 Uticaj potencijala veze	71
3.5.1 Potencijal nultog dometa	72
3.5.2 Yukawa potencijal	73

3.5.3	Coulombov potencijal i naknadno rasijanje	73
3.5.4	Interferencija amplituda jonizacije za direktne i naknadno rasijane elektrone	78
4	Uticaj jonizacionog potencijala na zakon odsijecanja	81
4.1	Zakon odsijecanja za različite atomske procese	82
4.2	Kvantno-mehanički pristup	83
4.3	Zakon odsijecanja visokoenergetskog dijela HATI spektra . . .	89
5	Analiza jonizacije iznad praga višeg reda primjenom SPM	95
5.1	Primjena metode sedlaste tačke pri opisu procesa jonizacije iznad praga višeg reda	95
5.2	Klasifikacija rješenja dobivenih metodom sedlaste tačke	97
5.3	Uniformna aproksimacija	101
5.4	Ponašanje rješenja sa promjenom ugla	103
6	SFA simulacija eksperimenata i pojačanje HATI spektra	107
6.1	Fokalno usrednjeni spektar	108
6.2	Primjer ATI simulacije za Kr i Xe	112
6.3	Ponderomotorna energija i zatvaranje kanala	113
6.4	Pojačanje dijelova HATI spektra	116
6.5	Objašnjenje pojačanja primjenom metode kvantnih orbita . .	117
6.6	Uticaj pojačanja na fokalno usrednjeni spektar	122
7	Zaključak	127
A	Atomske jedinice	129
B	Metod sedlaste tačke	133

Uvod

Prvi teorijski rad na temu multifotonske jonizacije je objavila Göpert-Meier [1] tridesetih godina prošlog vijeka. Eksperimenti koji predstavljaju stvarni početak razvoja fizike multifotonske jonizacije su izvedeni sredinom šezdesetih godina prošlog vijeka. Oni su direktno povezani sa uvođenjem u upotrebu pulsnih lasera. Prvi programi istraživanja multifotonske jonizacije su započeti 1965. godine u Moskvi u grupi predvođenoj Deloneovim [2], odnosno u Parizu u timu koji su predvodili Mainfray i Manus [3]. Istraživanja su uključivala različite atome, kao i talasne dužine upotrebljenog laserskog zračenja. Uglavnom su rezultati ovih eksperimenata bili predstavljeni kroz ukupni (totalni) presjek jonizacije. Mada su mjerenja ugaone i energetske raspodjele bila moguća, istraživači su se koncentrisali isključivo na brojanje jona. Jedna od takvih studija [3] je pokazala da je N -fotonska jonizacija, opisana u okviru teorije perturbacije N -tog reda, karakterisana vjerovatnoćom jonizacije u jedinici vremena

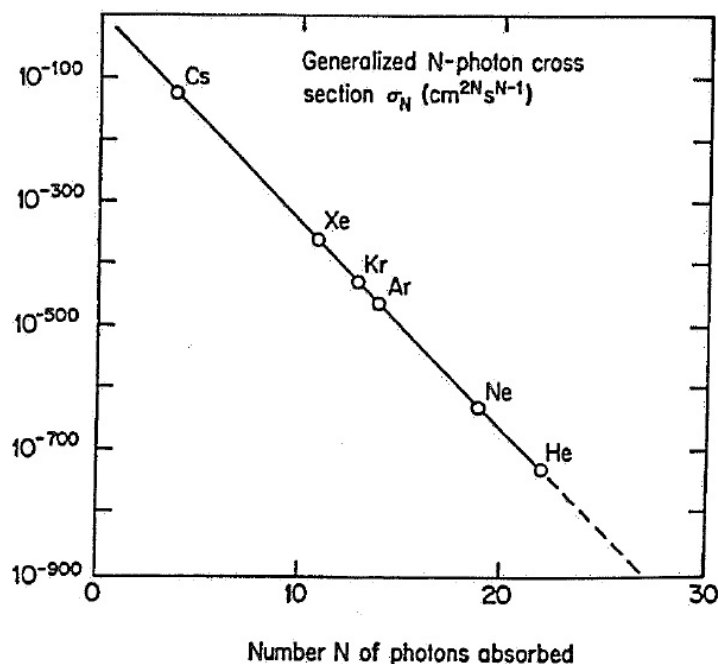
$$R_N = \sigma_N I^N, \quad (1)$$

gdje je I intenzitet laserskog zračenja, a σ_N totalni presjek jonizacije. Na slici 1 je predstavljena funkcionalna ovisnost totalnog presjeka jonizacije σ_N od minimalnog broja fotona N neophodnog za jonizaciju. Možemo kazati da je na taj način u naučnim krugovima bila prihvaćena slika po kojoj bi elektron trebao napustiti atom čim apsorbira minimalan broj fotona potreban da savlada odgovarajući atomski potencijal. Ovo je bila jednostavna multifotonska ekstrapolacija Einsteinove slike fotoelektričnog efekta. U ovoj slici kinetička energija elektrona E_k zadovoljava poznatu jednačinu fotoelektričnog efekta

$$E_k = N\hbar\omega - I_P, \quad (2)$$

gdje je I_P jonizaciona energija datog atoma, a N broj fotona sa frekvencijom ω potreban da bi elektron napustio atom.

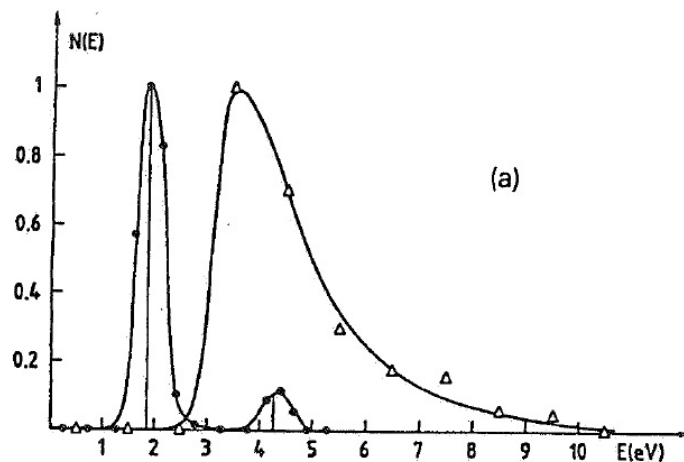
Međutim, 1979. godine je u Saclay laboratoriji, grupa predvođena Agostinijem detektovala elektrone koji su oslobođeni šestofotonskom i jedanaestofotonskom jonizacijom atoma ksenona [4]. Ovaj eksperiment je pokazao



Slika 1: Totalni presjeci jonizacije za šest različitih atoma kao funkcije minimalnog broja fotona N , potrebnih za multifotonsku jonizaciju.

drugi, dodatni pik više energije u energetsom spektru elektrona oslobođenih šestofotonskom jonizacijom (slika 2). Dodatni pik nije opažen u spektru koji odgovara jedanaestofotonskoj jonizaciji. Razmak među pikovima je odgovarao energiji emitovanih fotona. Dodatni pik na višoj energiji je značio da je elektron apsorbovao više energije nego što mu je potrebno da napusti potencijalnu barijeru atoma. U eksperimentu su korišteni fotoni energija 1.17 eV, odnosno 2.34 eV, u pogodno pojačanim 12 ns pulsevima neodijumskog lasera. Intenzitet laserskog polja, čija talasna dužina odgovara drugom harmoniku, je bio u intervalu od $6 \cdot 10^{12}$ do 10^{13} W/cm^2 . Agostini i saradnici su ovaj efekat nazvali jonizacija iznad praga (eng. Above-Threshold Ionization, [5]), te je ovaj naziv zajedno sa odgovarajućom skraćenicom ATI i prihvaćen u naučnim krugovima. Odmah nakon otkrića ATI-ja nije bilo načina da se teorijski objasni taj proces. Naime, u početku je bilo teško prihvatiti da je jonizovani elektron jednostavno apsorbovao još jedan prekomjerni foton. Zapravo, slobodan elektron i ne može apsorbovati foton, jer zakoni održanja energije i impulsa to jednostavno ne dozvoljavaju. S druge strane, ako se čitav proces odvija uz prisustvo trećeg tijela, uključujući inverzni bremsstrahlung, ovakva apsorpcija je moguća. Elastični sudar sa drugim elektronom ili jonom može

dovesti do neophodnog prijenosa impulsa. Međutim, u tom slučaju bi morao postojati čitav niz konačnih energija, a ne samo jedan dodatni izolirani pik kao što je zapaženo, tako da inverzni bremsstrahlung nije predstavljao zadovoljavajuće objašnjenje eksperimentalnih rezultata. Osim toga, proučavanje zavisnosti ATI-ja od pritiska gasova u izvedenim eksperimentima je pokazala da sudari nisu toliko bitni. Efekti koji su se javljali kao posljedica interakcije naboja su uspješno izbjegnuti u veoma precizno izvedenim eksperimentima.



Slika 2: Prvi eksperimentalni rezultati za energetski spektar fotoelektrona koji prikazuju ATI proces. Meta su bili atomi ksenona. Trokutići naznačuju podatke dobivene sa laser-skim poljem talasne dužine 1064 nm, dok se kružići odnose na podatke dobivene sa zračenjem talasne dužine 532 nm. Samo za ove druge zapažen je još jedan maksimum [4].

Ubrzo nakon ovog eksperimenta slične rezultate je dobila i van der Wielova grupa u Amsterdamu [6]. U ovom slučaju je dobiveno deset, odnosno dvanaest dodatnih pikova, čiji je razmak ponovo bio približno jednak vrijednosti energije korištenih fotona. U naredne četiri godine poduzeti su i eksperimenti koji su davali ugaonu raspodjelu ATI elektrona [7]. Nakon niza izvedenih eksperimenata, bilo je posve jasno da ATI elektroni apsorbiraju dodatne fotone. Kako je već pomenuto, za slobodni elektron to nije moguće, tako da se došlo do zaključka da zapravo elektronov jon služi kao svojevrsan rezervoar impulsa.

Svi pomenuti rezultati su odmah privukli pažnju teoretičara. Razlog više je bio i taj da je opažanje dodatnih maksimuma u energetskom spektru

ATI elektrona indiciralo da se u laserskom polju procesi nižeg i višeg reda odigravaju sa gotovo istom vjerovatnoćom. Ovo naravno nije u skladu sa perturbacionom teorijom, te je sugerisalo da se pri ATI procesu dešavaju bar djelomično neperturbativni događaji. Na taj način je ova oblast fizike ušla u neperturbativni režim. Treba zabilježiti da su uprkos ogromnim poteškoćama Gontier i Trahin, godinu nakon otkrića ATI-ja, još jednom pokušali primijeniti perturbativnu teoriju [8]. Rezultat je bila generalizacija jednačine (1)

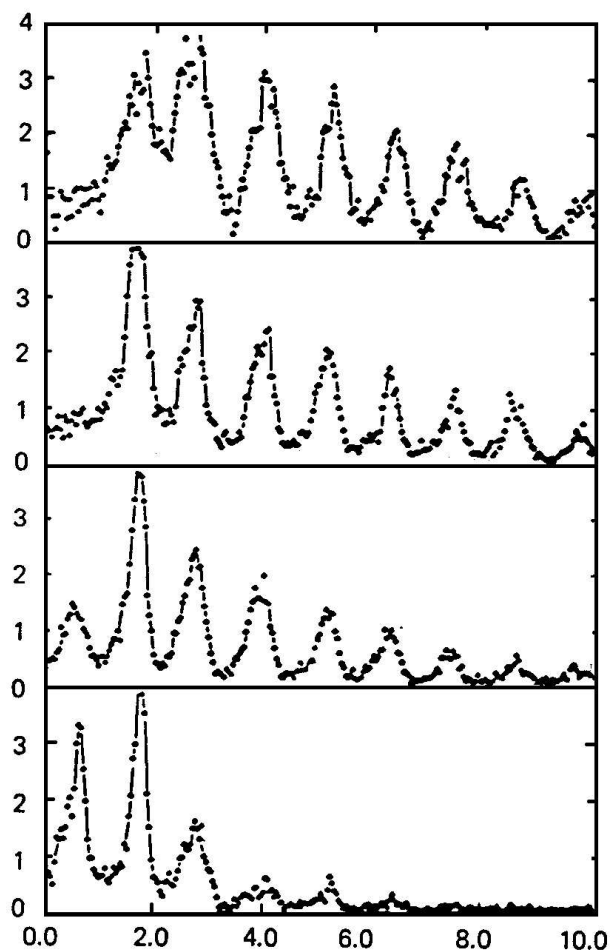
$$R_{N+S} \propto I^{N+S}, \quad (3)$$

gdje je S prekomjerni broj apsorbovanih fotona u odnosu na minimalan broj potreban za jonizaciju. Odgovarajući analog jednačine (2) za kinetičku energiju ATI elektrona bi bila sljedeća jednačina

$$E_k = (N + S)\hbar\omega - I_P. \quad (4)$$

Kao granica primjenljivosti perturbacione teorije uzima se ona kada je jačina laserskog polja uporediva sa jačinom Coulombovog polja koje osjeća elektron u osnovnom stanju atoma vodonika. Odgovarajuća kritična vrijednost intenziteta zračenja lasera je oko $3 \cdot 10^{16} \text{ W/cm}^2$, što je mnogo viši intenzitet u odnosu na intenzitete primijenjene u prvim ATI eksperimentima. Međutim, perturbativna teorija je posve neadekvatna pri opisu ATI-ja već sa intenzitetima laserskog polja neznatno iznad onih koji su korišteni u prvim eksperimentima, pa se usljed toga postavljalo pitanje da li se efekti, nastali pri ATI procesu, uopšte mogu smatrati naznakom neperturbativnog ponašanja ili se moraju interpretirati na posve drugačiji način. Kao dokaz potpunog pada primjenljivosti perturbacione teorije mogu poslužiti i eksperimentalni rezultati van der Wielove amsterdamske grupe predstavljeni u radu [9]. Nakon uvođenja time-of-flight elektron spektroskopije visoke rezolucije bilo je moguće dobiti veoma dobre spektre pri visokim intenzitetima laserskog polja. U eksperimentu je korišten Nd:YAG laser, a kao meta su korišteni atomi ksenona. Rezultati su predstavljeni na slici 3. Sa povećanjem intenziteta laserskog zračenja (najniža slika odgovara najnižem intenzitetu) imamo tendenciju dominacije maksimuma više energije nad maksimumom sa najnižom energijom. Dakle, prvi pik ATI spektra je izgubljen pri većim intenzitetima, dok preostali pikovi više ne slijede zakon predstavljen sa (3). Ovaj efekat je nazvan prigušenje maksimuma (eng. peak suppression).

U periodu koji slijedi razvijene su mnoge teorijske metode koje opisuju ATI. Osim toga, opažene su neke nove i složenije karakteristike jonizacije iznad praga. Naime, dio elektrona pod uticajem laserskog polja može da se vrati ka matičnom jonu, elastično se rasije na njemu, te biva detektovan sa mnogo većom energijom nego elektroni koji su odmah nakon jonizacije napustili lasersko polje.



Slika 3: Prvi ATI podaci koji pokazuju izrazito prigušenje energetski najnižeg elektronskog pika. Od dna prema vrhu odvojeni grafovi odgovaraju rastućoj energiji laserskog polja i to 10, 17, 22 i 32 mJ. Vertikalna osa daje jačinu signala u proizvoljnim jedinicama, dok horizontalna osa označava kinetičku energiju ATI elektrona u eV. Na slici se jasno vidi pojava prigušenja prvog maksimuma [9].

Nedugo nakon otkrića ATI-ja, otkriveni su srodni atomski procesi koji se odvijaju pod uticajem jakog laserskog polja. To su generacija viših harmonika (HHG) i nesekvencijalna dvostruka jonizacija (NSDI). U prvom slučaju jonizovani elektron se pod uticajem polja vraća ka matičnom jonu i rekombinuje se uz oslobađanje visokoenergetskog fotona. U slučaju NSDI-a, elektron se pri povratku neelastično rasijava izbijajući dodatni elektron.

Ovaj magistarski rad je podijeljen u šest poglavlja. U prvom se upoz-

najemo sa osnovnim karakteristikama interakcije atoma i laserskog polja. U drugom poglavlju dajemo kratak opis atomskih procesa u laserskom polju. Eksperimentalne metode, teorijske pristupe i odgovarajuće rezultate vezane za jonizaciju iznad praga izlažemo u trećem poglavlju. Naredna tri poglavlja predstavljaju najznačajniji dio ovog magistarskog rada i u njima su predstavljene novi rezultati do kojih smo došli. Četvrto poglavlje je posvećeno novim rezultatima koji uključuju uticaj jonizacionog potencijala atoma na visokoenergetski plato ATI-ja. Analiza procesa metodom sedlaste tačke je predstavljena u petom poglavlju. U posljednjem, šestom dijelu ovog magistarskog rada su predstavljeni ATI spektri, sa posebnim osvrtom na efekat zatvaranja kanala (eng. channel closing).

Poglavlje 1

Atom u laserskom polju

U ovom poglavlju ćemo se osvrnuti na osnovne pristupe vezane za opis interakcije elektromagnetnog polja i atoma. Upoznaćemo se sa opštim pojmovima, oznakama i ustaljenim terminima koji se koriste pri proučavanju atomskih procesa u jakom laserskom polju. Razmotrićemo i aproksimacije koje se često koriste, te njihov opseg valjanosti.

1.1 Interakcija atoma i laserskog polja

Pošto je cilj našeg israživanja opis interakcije atoma i laserskog polja, te kako nas ne interesuju relativistički efekti, tj. slučajevi kada imamo laserska polja veoma velikog intenziteta koja su u stanju ubrzati elektron tako da njegova brzina bude istog reda veličine kao i brzina svjetlosti, to će kao polazna osnova za kvantno-mehanički opis navedene interakcije biti odgovarajuća Schrödingerova jednačina

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right)\psi = 0, \quad (1.1)$$

gdje je hamiltonijan sistema atom + polje dat sa [10]

$$\begin{aligned} \hat{H} = \hat{H}_{EM} + \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^Z \left[\hat{\mathbf{p}}_{ei} + e\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_{ei})\right]^2 + \\ \frac{1}{2M} \left[\hat{\mathbf{p}}_N - Ze\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_N)\right]^2 + V(\mathbf{r}_{e1}, \dots, \mathbf{r}_{eZ}, \mathbf{r}_N), \end{aligned} \quad (1.2)$$

U gornjoj jednačini je $e > 0$ elementarni naboj, M masa atomskog jezgra, m masa elektrona, $\hat{\mathbf{p}}_N$ i $\hat{\mathbf{p}}_{ei}$ operatori impulsa atomskog jezgra i elektrona respektivno, $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$, Z broj elektrona u atomu, $\mathbf{r}_N$ radijus vektor položaja

jezgra, $\mathbf{r}_{ei}$ radijus vektor položaja elektrona, $V(\mathbf{r}_{e1}, \dots, \mathbf{r}_{eZ}, \mathbf{r}_N)$ potencijal međudjelovanja jezgra sa elektronima i elektrona međusobno, $\hat{\mathbf{A}}$ operator vektorskog potencijala polja, dok je $\hat{H}_{EM}$ hamiltonijan slobodnog elektromagnetnog polja, definisan sa

$$\hat{H}_{EM} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega_k \hat{n}_{\mathbf{k}\lambda}, \quad (1.3)$$

gdje je suma po $\mathbf{k}$, λ suma po potpunom skupu modova elektromagnetnog polja. $\mathbf{k}$ je valni vektor moda, $k = |\mathbf{k}|$, a λ broj koji označava jednu od dvije moguće transverzalne polarizacije polja. $\hbar\omega_k$ je energija moda $\mathbf{k}\lambda$, a $\hat{n}_{\mathbf{k}\lambda}$ je operator čije su vlastite vrijednosti cijeli brojevi koji predstavljaju broj fotona pridruženog moda. Ovaj operator je dat sa

$$\hat{n}_{\mathbf{k}\lambda} = \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}, \quad (1.4)$$

gdje su $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$ i $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$ operatori stvaranja i uništavanja, respektivno, za $\mathbf{k}\lambda$ mod. Oni zadovoljavaju komutacione relacije

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}, \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'}, \quad (1.5)$$

a svi drugi međusobni komutatori su jednaki nuli.

Vektorski potencijal polja, $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$, se može razviti po bilo kojem potpunom skupu $\mathbf{u}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r})$ koji zadovoljava Helmholtzovu jednačinu

$$[\nabla^2 + \omega_{k\lambda}^2/c^2] \mathbf{u}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.6)$$

Najjednostavniji takav skup jeste skup ravnih valova

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\sqrt{V}}, \quad \lambda = 1, 2, \quad (1.7)$$

gdje je

$$\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}^2 = 1, \quad \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}1} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}2} = \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda} = 0, \quad (1.8)$$

a V je volumen kvantizacije polja. Vektor polarizacije, koji odgovara modu $\mathbf{k}\lambda$, u eksplicitnom obliku glasi

$$\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda} = \hat{\mathbf{e}}_x \cos \eta_{\mathbf{k}\lambda} + i \hat{\mathbf{e}}_y \sin \eta_{\mathbf{k}\lambda}. \quad (1.9)$$

U gornjoj jednačini $\eta_{\mathbf{k}\lambda}$ je ugao polarizacije posmatranog moda $\mathbf{k}\lambda$. Vektori $\hat{\mathbf{e}}_x$ i $\hat{\mathbf{e}}_y$ su jedinični vektori u smjeru x i y ose, respektivno. Ova dva vektora zajedno sa vektorom $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ čine ortogonalan sistem jediničnih vektora.

Uz Coulombovu kalibraciju $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{A}} = 0$, vektorski potencijal polja $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$ se može razviti po kompletnom skupu ravnih valova (1.7), tako da je predstavljen sljedećim izrazom (u SI jedinicama)

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega} \right)^{\frac{1}{2}} [a_{\mathbf{k}\lambda} \mathbf{u}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}) + \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \mathbf{u}_{\mathbf{k}\lambda}^*(\mathbf{r})], \quad (1.10)$$

gdje je ε_0 dielektrička konstanta vakuuma.

Vratimo se na trenutak jednačini (1.1). Valna funkcija ψ je funkcija u prostoru $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_\parallel$, gdje je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor za čestice u atomu (konfiguracioni prostor svih čestica), a $\mathcal{H}_\parallel$ je prostor druge kvantizacije za fotone (Hilbertov prostor svih modova elektromagnetnog polja).

Dosada iznešeni opis interakcije atoma i laserskog polja odgovara onom pristupu u kojem se oba objekta posmatraju unutar formalizma kvantne mehanike. Međutim, pretpostavljajući specifične karakteristike zračenja koje emituje laser, kao što je velik broj fotona u modovima laserskog polja, mi ga možemo opisati i klasičnim elektromagnetnim poljem. Na primjer, jedan mod laserskog zračenja intenziteta $I = 1 \cdot 10^{-3} \text{ W/cm}^2$ i energije fotona $\hbar\omega = 1 \text{ eV}$ u zapremini od $V = 1 \text{ cm}^3$ ima približno $2 \cdot 10^8$ fotona

$$N = \frac{I}{\hbar\omega} \frac{V}{c} \sim 2 \cdot 10^8. \quad (1.11)$$

Atom i dalje posmatramo kao kvantno-mehanički objekt, pa se, usljed takvog kombinovanog opisa interakcije, ovakav pristup naziva i poluklasični opis interakcije laserskog polja i atoma. Da bi smo pokazali da se u slučaju velikog broja fotona u modu laserskog polja ono može opisivati kao klasično, izvršićemo prijelaz na interakcionu reprezentaciju pomoću sljedeće transformacije

$$\psi = \exp(-iH_{EM}t/\hbar)\psi_I, \quad (1.12)$$

gdje je ψ_I valna funkcija u interakcionoj reprezentaciji. Schrödingerova jednačina tada glasi

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_I \right) \psi_I = 0, \quad (1.13)$$

gdje je

$$\begin{aligned} \hat{H}_I(t) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^Z \left[\hat{\mathbf{p}}_{ei} + e\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_{ei}, t) \right]^2 + \frac{1}{2M} \left[\hat{\mathbf{p}}_N - Ze\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_N, t) \right]^2 \\ + V(\mathbf{r}_{e1}, \dots, \mathbf{r}_{eZ}, \mathbf{r}_N), \end{aligned} \quad (1.14)$$

hamiltonijan sistema atom + polje u interakcionoj reprezentaciji. Pored toga, $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$ je vektorski potencijal polja u pomenutoj reprezentaciji, koji eksplicitno zavisi od vremena, i ima sljedeći oblik

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \exp\left(i\hat{H}_{EM}t/\hbar\right) \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) \exp\left(-i\hat{H}_{EM}t/\hbar\right). \quad (1.15)$$

Koristeći izraz (1.10) i odgovarajuće komutacione relacije za operatore stvaranja i uništavanja, dobićemo

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega}\right)^{\frac{1}{2}} [\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \mathbf{u}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_k t) \\ + \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \mathbf{u}_{\mathbf{k}\lambda}^*(\mathbf{r}) \exp(i\omega_k t)]. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Primijenimo sada faznu reprezentaciju polja. U tu svrhu uvode se nezavisne koordinate $\phi_{\mathbf{k}\lambda}$ koje su vezane za pojedinačne modove. Ove nezavisne koordinate nazivamo faznim pomacima i one uzimaju vrijednosti unutar intervala $[0, 2\pi]$. Vlastita valna funkcija $\mathbf{k}\lambda$ moda u ovoj reprezentaciji ima oblik [11]

$$\langle \phi_{\mathbf{k}\lambda} | n_{\mathbf{k}\lambda} \rangle = (2\pi)^{-1/2} \exp(in_{\mathbf{k}\lambda} \phi_{\mathbf{k}\lambda}), \quad (1.17)$$

a operator broja okupiranih stanja je

$$\hat{n}_{\mathbf{k}\lambda} = -i \frac{\partial}{\partial \phi_{\mathbf{k}\lambda}}. \quad (1.18)$$

Odgovarajući operatori uništavanja i stvaranja su

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} = e^{-i\phi_{\mathbf{k}\lambda}} \left(-i \frac{\partial}{\partial \phi_{\mathbf{k}\lambda}}\right)^{1/2}, \quad (1.19)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger = \left(-i \frac{\partial}{\partial \phi_{\mathbf{k}\lambda}}\right)^{1/2} e^{i\phi_{\mathbf{k}\lambda}}, \quad (1.20)$$

koji, naravno, zadovoljavaju komutacione relacije (1.5).

Zbog velikog broja fotona u modu laserskog polja, kada uvažimo fluktuaciju, trenutni broj fotona se može predstaviti kao

$$n_{\mathbf{k}\lambda} = N_{\mathbf{k}\lambda} + \nu_{\mathbf{k}\lambda}, \quad (1.21)$$

gdje je $N_{\mathbf{k}\lambda}$ prosječna vrijednost broja fotona (srednja vrijednost broja zaposjednuća) u ovom modu za vrijeme datog procesa, a $\nu_{\mathbf{k}\lambda}$ je varijacija oko tog

broja, nekoliko redova veličine manja od njega. S obzirom na (1.21), pomoću odgovarajuće unitarne transformacije, vlastite valne funkcije $\mathbf{k}\lambda$ moda se mogu predstaviti na sljedeći način

$$|n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle = e^{iN_{\mathbf{k}\lambda}\phi_{\mathbf{k}\lambda}}|\nu_{\mathbf{k}\lambda}\rangle. \quad (1.22)$$

Operator broja okupiranih stanja izražen preko (1.18) postaje

$$\hat{n}_{\mathbf{k}\lambda} = \left(N_{\mathbf{k}\lambda} - i \frac{\partial}{\partial \phi_{\mathbf{k}\lambda}} \right), \quad (1.23)$$

odnosno operatori uništavanja i stvaranja predstavljeni sa (1.19) i (1.20) prelaze u

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} = e^{-i\phi_{\mathbf{k}\lambda}} \left(N_{\mathbf{k}\lambda} - i \frac{\partial}{\partial \phi_{\mathbf{k}\lambda}} \right)^{1/2}, \quad (1.24)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger = \left(N_{\mathbf{k}\lambda} - i \frac{\partial}{\partial \phi_{\mathbf{k}\lambda}} \right)^{1/2} e^{i\phi_{\mathbf{k}\lambda}}, \quad (1.25)$$

respektivno. S obzirom da je $N_{\mathbf{k}\lambda} \gg \nu_{\mathbf{k}\lambda}$, može se izvršiti razvoj u red

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} = e^{-i\phi_{\mathbf{k}\lambda}} \sqrt{N_{\mathbf{k}\lambda}} \left(1 - \frac{i}{2N_{\mathbf{k}\lambda}} \frac{\partial}{\partial \phi_{\mathbf{k}\lambda}} \dots \right), \quad (1.26)$$

i analogno za $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$. Kada se ovaj razvoj uvrsti u izraz za operator vektorskog potencijala (1.16), za prvi član u razvoju, uz (1.7), dobije se

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left(\frac{\hbar N_{\mathbf{k}\lambda}}{2\varepsilon_0 \omega_k V} \right)^{\frac{1}{2}} \{ \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}\lambda} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t - \phi_{\mathbf{k}\lambda})] \\ + \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}\lambda}^* \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t - \phi_{\mathbf{k}\lambda})] \}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

što je upravo oblik klasičnog vektorskog potencijala sa amplitudom

$$A_{0\mathbf{k}\lambda} = E_{0\mathbf{k}\lambda}/\omega_k = \left(\frac{2\hbar N_{\mathbf{k}\lambda}}{\varepsilon_0 \omega V} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.28)$$

Sljedeći član u razvoju, $\delta \hat{\mathbf{A}}$, je reda $N_{\mathbf{k}\lambda}^{-1}$, pa se, kao i svi preostali članovi, može zanemariti u odnosu na prvi član. Izraz za vektorski potencijal u jednačini (1.27) je i dalje operator (jer je $\phi_{\mathbf{k}\lambda}$ operator). Za jednomodno lasersko polje $\phi_{\mathbf{k}\lambda}$ se može apsorbovati odgovarajućim izborom početka vremena, i u tom slučaju se $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$ može smatrati potpuno klasičnim.

Koristeći relaciju (1.9) za vektor polarizacije, vektorski potencijal moda $\mathbf{k}\lambda$ možemo izraziti na sljedeći način

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = A_{0\mathbf{k}\lambda} & [\hat{\mathbf{e}}_x \cos(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi_{\mathbf{k}\lambda}) \cos \eta_{\mathbf{k}\lambda} \\ & + \hat{\mathbf{e}}_y \sin(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi_{\mathbf{k}\lambda}) \sin \eta_{\mathbf{k}\lambda}].\end{aligned}\quad (1.29)$$

Za $\eta_{\mathbf{k}\lambda} = 0$ imamo linearnu polarizaciju u smjeru x -ose, a za $\eta_{\mathbf{k}\lambda} = \pi/2$ linearnu polarizaciju u smjeru y -ose. Ako je $\eta_{\mathbf{k}\lambda} = \pi/4$, polarizacija je kružna, a ostale vrijednosti ugla $\eta_{\mathbf{k}\lambda}$ daju eliptičku polarizaciju.

Može se pokazati [11] da se multimodno lasersko polje može predstaviti kao klasično jednomodno lasersko polje sa vremenski sporo promjenljivom amplitudom $\bar{E}_0$ i fazom $\bar{\phi}$. Te promjene su male u odnosu na vremensku skalu atomskih procesa, tako da se $\bar{E}_0$ i $\bar{\phi}$ mogu smatrati konstantnim tokom samog procesa, a kasnije treba rezultat usrednjiti po distribuciji E_{0k} i ϕ_k . Zbog toga je prilikom proračuna čiji su rezultati izneseni u ovom radu lasersko polje smatrano klasičnim jednomodnim poljem.

U ovom magistarskom radu ćemo također koristiti poluklasični pristup interakciji atoma i laserskog polja pri opisu HATI procesa. Zbog jednostavnosti, ubuduće nećemo koristiti posebne oznake za kvantno-mehaničke operatore $\hat{}$.

1.2 Prijelaz na sistem centra masa i dipolna aproksimacija

Uvodimo koordinate centra masa

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho} &= \frac{1}{M_A} \left(M_N \mathbf{r}_N + \sum_{i=1}^Z m \mathbf{r}_{ei} \right), \\ \mathbf{r}_i &= \mathbf{r}_{ei} - \mathbf{r}_N, \quad M_A = M_N + Zm.\end{aligned}\quad (1.30)$$

U gornjim izrazima, M_A je masa atoma. Sa tačnošću do $\mathcal{O}(m/M_A)$ je

$$\mathbf{r}_{ei} = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}_i. \quad (1.31)$$

Dakle, vektorski potencijal je sada funkcija novih koordinata $\boldsymbol{\rho}$ i $\mathbf{r}_i$, tj. $\mathbf{A}(\mathbf{r}_{ei}, t) \propto \exp(\pm i \mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}_i))$. Relativne koordinate su obično ograničene veličinom atoma, tako da je (u području optičkih frekvencija)

$$\langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i \rangle \ll 1, \quad (1.32)$$

iz čega slijedi dipolna aproksimacija

$$\exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i) = 1 + i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i + \dots \approx 1. \quad (1.33)$$

Ako se zanemare članovi koji su m/M_A puta manji od vodećih i koristi dipolna aproksimacija, tada se iz (1.14) i (1.30) dobija

$$H_I(t) = \frac{\mathbf{p}_\rho^2}{2M_N} + \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^Z [\mathbf{p}_i + e\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}, t)]^2 + V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_Z; \boldsymbol{\rho}). \quad (1.34)$$

Doprinos koordinate centra masa vektorskom potencijalu elektromagnetnog polja je sadržan u faktoru $\exp(\pm i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho})$, tako da to polje, općenito, može uticati na kretanje atoma kao cjeline [11]. Taj uticaj je obično mali, jer je masa atoma velika, te se može zanemariti. Ako ga zanemarimo, onda je $\boldsymbol{\rho}$ konstanta ili sporo promjenljiva funkcija vremena, pa se kinetička energija centra masa $\mathbf{p}_\rho^2/(2M_N)$ može ispustiti iz hamiltonijana i staviti $\boldsymbol{\rho} = 0$. Tada je $\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}, t) = \mathbf{A}(0, t) = \mathbf{A}(t)$ i hamiltonijan sistema je oblika

$$H(t) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^Z (\mathbf{p}_i + e\mathbf{A}(t))^2 + V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_Z). \quad (1.35)$$

Ovdje $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_Z)$ označava potencijal međudjelovanja jezgra sa elektronima i elektrona međusobno. Vektorski potencijal laserskog polja je

$$\hat{\mathbf{A}}(t) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left(\frac{\hbar N_{\mathbf{k}\lambda}}{2\varepsilon_0 \omega_k V} \right)^{\frac{1}{2}} \{ \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}\lambda} \exp[-i(\omega_k t + \phi_{\mathbf{k}\lambda})] + \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}\lambda}^* \exp[i(\omega_k t + \phi_{\mathbf{k}\lambda})] \}, \quad (1.36)$$

pri čemu smo zanemarili prvu kvantnu korekciju $\delta\hat{\mathbf{A}}$. Uzimajući u obzir relaciju (1.9), vektorski potencijal moda $\mathbf{k}\lambda$ je dat sa sljedećim izrazom

$$\hat{\mathbf{A}}(t) = A_{0\mathbf{k}\lambda} [\hat{\mathbf{e}}_x \cos(\omega_k t + \phi_{\mathbf{k}\lambda}) \cos \eta_{\mathbf{k}\lambda} + \hat{\mathbf{e}}_y \sin(\omega_k t + \phi_{\mathbf{k}\lambda}) \sin \eta_{\mathbf{k}\lambda}]. \quad (1.37)$$

1.3 Kalibracione transformacije

Hamiltonijan dat sa (1.35), u prethodnom odjeljku, može biti nepraktičan pri konkretnim proračunima fizikalnih veličina. Zato se često pomoću kalibracionih transformacija (globalne fazne transformacije) prelazi na drugačije oblike hamiltonijana koji su ekvivalentni polaznom. Radi se o unitarnim transformacijama, tj. to su transformacije simetrije. Upravo zbog njihove unitarnosti sve fizikalno mjerljive veličine se neće promijeniti. Razmotrimo neke kalibracione transformacije [10].

Označimo hamiltonijan (1.35) sa H_1 , a valnu funkciju u jednačini (1.13) sa ψ_1 i nazovimo to prvom kalibracijom. Općenito, j -ta kalibracija se dobiva iz prve unitarnom transformacijom

$$\psi_j = e^{i\phi_j} \psi_1, \quad (1.38)$$

pri čemu je ϕ_j proizvoljna funkcija.

Nova valna funkcija zadovoljava transformiranu Schrödingеровu jednačinu

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_j \right) \psi_j = 0, \quad (1.39)$$

gdje je novi hamiltonijan H_j određen relacijom

$$H_j = e^{i\phi_j} H_1 e^{-i\phi_j} - \hbar \frac{\partial \phi_j}{\partial t}. \quad (1.40)$$

Pogledajmo sada tri različite kalibracije, koje se ujedno i najčešće koriste. Druga kalibracija, tzv. $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$ kalibracija, je takva da u hamiltonijanu nestaju članovi sa $\mathbf{A}^2$ iz H_1 . Sada imamo

$$\phi_2 = \frac{Ze^2}{2m\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{A}^2(t'), \quad (1.41)$$

što vodi na hamiltonijan

$$H_2 = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^Z \mathbf{p}_i^2 + \frac{e}{m} \sum_{i=1}^Z \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{p}_i + V. \quad (1.42)$$

Treća kalibracija - $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ kalibracija se dobija pomoću

$$\phi_3 = \frac{e}{\hbar} \sum_{i=1}^Z \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{A}(t). \quad (1.43)$$

Koristeći jednačine

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad e^{i\phi_3} \mathbf{p}_i e^{-i\phi_3} = \mathbf{p}_i - e\mathbf{A}(t), \quad (1.44)$$

dobija se

$$H_3 = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^Z \mathbf{p}_i^2 + e \sum_{i=1}^Z \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{E}(t) + V. \quad (1.45)$$

Za četvrtu ili Kramers-Hennebergerovu kalibraciju je

$$\phi_4 = \frac{e}{m\hbar} \sum_{i=1}^Z \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{A}(t') + \frac{Ze^2}{2m\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{A}(t')^2. \quad (1.46)$$

Ako uzmemo u obzir relaciju

$$e^{i\phi_4} \mathbf{r}_i e^{-i\phi_4} = \mathbf{r}_i - \boldsymbol{\alpha}(t), \quad (1.47)$$

gdje je

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \frac{e}{m} \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{A}(t'), \quad (1.48)$$

vidimo da ova transformacija takođe može biti posmatrana kao prostorna translacija. Odgovarajući hamiltonijan je dat izrazom

$$H_4 = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^Z \mathbf{p}_i^2 + V(\mathbf{r} - \boldsymbol{\alpha}(t)). \quad (1.49)$$

U gornjem izrazu, $\boldsymbol{\alpha}(t)$ predstavlja koordinatu klasičnog elektrona koji osciluje u laserskom polju, i to bez drugih interakcija. Hamiltonijan H_4 u sebi sadrži lasersku interakciju u obliku vremenski zavisne prostorne translacije atomskog potencijala za $\boldsymbol{\alpha}(t)$.

Napomenimo još da pri izračunavanju fizikalnih opservabli koje su definisane izvan laserskog polja, rezultati dobiveni u bilo kojoj gore navedenoj kalibraciji moraju biti isti, pod uslovom da su proračuni egzaktni. Treba biti oprezan kada se koriste aproksimacije, jer tada rezultati mogu zavistiti od kalibracije. Proračuni čiji su rezultati izloženi u ovom radu rađeni su u $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ kalibraciji.

1.4 Volkovljevo rješenje

Elektron u laserskom (elektromagnetnom) polju, kada na njega ne djeluju druge sile, može se jednostavno opisati pomoću rješenja Schrödingrove jednačine u prvoj kalibraciji (u SI jedinicama)

$$\left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2m} [\mathbf{p} + e\mathbf{A}(t)]^2 \right\} |\psi_{\mathbf{q}}\rangle = 0, \quad (1.50)$$

koje je dato sa

$$|\psi_{\mathbf{q}}\rangle = |\mathbf{q}\rangle \exp \left\{ \frac{-i}{2\hbar m} \int^t [\hbar \mathbf{q} + e\mathbf{A}(t')]^2 dt' \right\}, \quad (1.51)$$

gdje je $|\mathbf{q}\rangle$ valni vektor koji je u koordinatnoj reprezentaciji predstavljen ravnim valom

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{q} \rangle = \frac{e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}}{(2\pi)^{3/2}}, \quad \langle \mathbf{q} | \mathbf{q}' \rangle = \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}'). \quad (1.52)$$

S obzirom da je prilikom proračuna u ovom radu korištena $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ kalibracija, Volkovljevu valnu jednačinu u ovoj kalibraciji ćemo dobiti, kako je to objašnjeno u prethodnom odjeljku, transformacijom

$$\psi_{\mathbf{q}}^{(3)} = e^{i\frac{e}{\hbar}\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(t)} \psi_{\mathbf{q}}^{(1)}, \quad (1.53)$$

$$|\psi_{\mathbf{q}}^{(3)}\rangle = |\mathbf{q} + \frac{e}{\hbar}\mathbf{A}(t)\rangle \exp \left\{ \frac{-i}{2m\hbar} \int^t [\hbar\mathbf{q} + e\mathbf{A}(t')]^2 dt' \right\}. \quad (1.54)$$

Hamiltonijan je u ovom slučaju dat sa

$$H_3 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t), \quad (1.55)$$

a akcija sa

$$S_{\mathbf{q}}(t) = \frac{\hbar}{2m} \int^t [\mathbf{q} + \frac{e}{\hbar}\mathbf{A}(t')]^2 dt'. \quad (1.56)$$

Donja granica u izrazu za akciju daje fazu koja ne doprinosi ni jednoj opservabli, pa nema nikakav značaj. Tako se izraz za Volkovljevu valnu funkciju u $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ kalibraciji može napisati i kao

$$|\psi_{\mathbf{q}}^{(V)}(t)\rangle = |\mathbf{q} + \frac{e}{\hbar}\mathbf{A}(t)\rangle e^{-iS_{\mathbf{q}}(t)}. \quad (1.57)$$

Svi proračuni u ovom radu vršeni su u atomskim jedinicama¹, pa će u narednim poglavljima i formule biti pisane u atomskim jedinicama ($e = \hbar = m = 1$). Volkovljeva valna funkcija u $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ kalibraciji i atomskim jedinicama ima oblik

$$|\psi_{\mathbf{q}}^{(V)}(t)\rangle = |\mathbf{q} + \mathbf{A}(t)\rangle e^{-\frac{i}{2} \int^t [\mathbf{q} + \mathbf{A}(t')]^2 dt'}. \quad (1.58)$$

¹Vidjeti Dodatak A.

1.5 Mehanizmi jonizacije i Keldyshev parametar

Postoje različiti mehanizmi usljed kojih dolazi do jonizacije. Pri umjerenim intenzitetima laserskog zračenja odvija se normalan proces multifotonske jonizacije. Naime, atom prihvatajući određen broj fotona, prelazi u pobuđena međustanja, da bi naposljetku, kada skupi dovoljnu energiju koja je veća od jonizacione energije atoma, elektron napustio atom i našao se u kontinuumu. Ovaj mehanizam je prikazan na slici 1.1(a). Ako je intenzitet laserskog polja dovoljno visok i frekvencija dovoljno niska, u okviru kvazistacionarne aproksimacije, polje je dovoljno jako da deformiše atomski potencijal do tog opsega, da kroz novonastalu potencijalnu barijeru elektron može tunelirati. Odgovarajući scenario je prikazan na slici 1.1(b). Kako jačina polja raste, član kojim opisujemo interakciju postaje jači, čineći tako da gradijent koji karakteriše barijeru postaje više negativan. Drugim riječima, potencijalna barijera postaje niža i manja, sve dok u određenom trenutku osnovno stanje, eventualno prestane više biti vezano stanje. Na primjer, u slučaju osnovnog stanja atoma vodonika, te uz primijenjeno lasersko polje niske frekvencije posljednje opisani mehanizam se dešava pri intenzitetu laserskog polja od $1.4 \cdot 10^{14} \text{ W/cm}^2$. Ovaj proces jonizacije je poznat i kao jonizacija preko barijere (eng. Over-The-Barrier Ionization, OTBI) i prikazan je na slici 1.1(c). Kritična vrijednost polja za slučaj jonizacije preko barijere se dobije izjednačavanjem maksimalne vrijednosti vanjskim poljem deformisanog potencijala sa jonizacionom energijom datog atoma. Kritična vrijednost polja koja odgovara OTBI mehanizmu jonizacije vodi ka kritičnoj vrijednosti intenziteta laserskog polja. Ove dvije veličine su povezane na sljedeći način

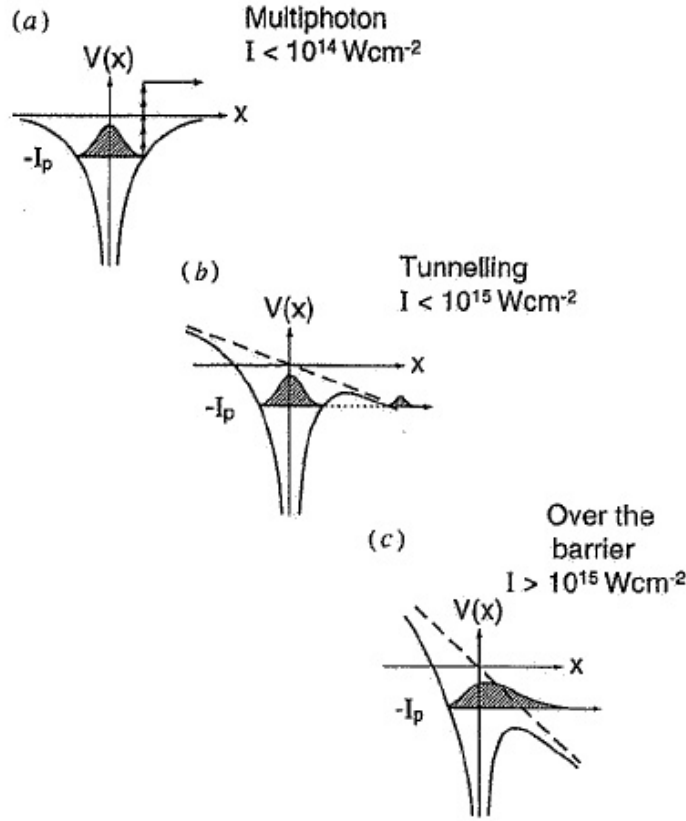
$$I_{\text{OTBI}} = \frac{c\varepsilon_0 E_{\text{kr}}^2}{2}. \quad (1.59)$$

Koristeći prethodno pomenuti uslov, da energija pri prevojnoj tački atomskog potencijala pod uticajem polja kritične jačine odgovara upravo vrijednosti energije veze elektrona u atomu, možemo dobiti vrijednost kritičnog intenziteta izraženog preko jonizacionog potencijala odgovarajućeg atoma I_P i njegovog naboja Z . Na osnovu iznešenih pretpostavki jednostavno se može dobiti [12] da vrijedi

$$E_{\text{kr}} = \frac{I_P^2}{4Z}. \quad (1.60)$$

Koristeći izraze (1.59) i (1.60) konačno dobijemo da je

$$I_{\text{OTBI}} [\text{W/cm}^2] = 4 \cdot 10^9 (I_P [\text{eV}])^4 / Z^2. \quad (1.61)$$



Slika 1.1: Šematski dijagram koji prikazuje tri moguća mehanizma jonizacije. Na slici (a) je prikazan mehanizam multifotonske jonizacije koji dominira pri intenzitetima nižim od intenziteta 10^{14} W/cm^2 . Kako intenzitet raste to je atomski potencijal više deformisan, pa tada dominira mehanizam tuneliranja, kao što je prikazano na slici (b). Pri još većim intenzitetima, recimo iznad 10^{15} W/cm^2 , barijera je do te mjere prigušena da je početni valni paket elektrona u mogućnosti da iskoči iz atomskog potencijala. Ovaj mehanizam jonizacije se naziva jonizacija preko barijere, te je prikazana na slici (c) [14].

Zasićenje jonizacije je također bitan efekat koji se dešava usljed smanjenja broja raspoloživih atoma u gasu podvrgnutom laserskom zračenju. Za dato vrijeme trajanja pulsa, ovo zasićenje se dešava pri određenoj vrijednosti intenziteta laserskog polja, I_{sat} . Ovu vrijednost intenziteta posmatramo kao maksimalnu vrijednost intenziteta koju atom može podnijeti. Kao primjer posmatrajmo atome ksenona podvrgnute pulsu lasera u trajanju od 36 ps. L'Huillier sa saradnicima [13] je došao do vrijednosti intenziteta zasićenja $I_{\text{sat}}(\text{Xe}) \approx 2.5 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$. Ako proračunamo I_{OTBI} na osnovu izraza (1.61) dobijemo da je $I_{\text{OTBI}} \approx 8.6 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$. Ovo znači da atomi ksenona ne

moгу preživjeti relativno spor rast intenziteta do vrijednosti I_{OTBI} . Dakle, svi atomi će biti jonizovani uglavnom prije dostizanja ove vrijednosti intenziteta putem mehanizma multifotonske jonizacije. Treba napomenuti, da će pri takvim vrijednostima intenziteta, njegovo povećanje voditi ka daljem procesu jonizacije, ali sa veoma niskom stopom.

U narednim poglavljima ćemo vidjeti da, nakon što se elektron našao u kontinuumu, njegovo kretanje u laserskom polju može biti posmatrano i jako dobro opisano unutar granica klasične fizike. Ovo znači da se proces jonizacije odvija jako brzo, tj. unutar malog djelića optičkog ciklusa blizu samog maksimuma intenziteta pulsa, na mjestu gdje je potencijalna barijera maksimalno prigušena vanjskim poljem. Sam proces tuneliranja je čisto kvantno-mehaničke prirode. Mehanizam tuneliranja je bio predmet brojnih eksperimentalnih istraživanja (pogledati rad [14] i reference unutar njega). Prelaskom sa multifotonske jonizacije ka tunel režimu, struktura oštih pikova u ATI spektru se gubi i postupno prelazi u kontinuiranu distribuciju.

Veličina koja je dobijena u teorijskim proračunima, a govori nam u kojem režimu se odvija proces jonizacije atoma, je Keldyshev parametar. Keldysh je poopštio gornje razmatranje na slučaj kada se potencijal atoma deformiše i pod uticajem harmonijskog promjenljivog vanjskog polja i definisao je odgovarajući adijabatski parametar γ [15]

$$\gamma = \frac{\omega_{\text{lasera}}}{\omega_{\text{tuneliranja}}}, \quad (1.62)$$

gdje su ω_{lasera} i $\omega_{\text{tuneliranja}}$ frekvencije laserskog polja i tuneliranja, respektivno. Frekvencija tuneliranja je obrnuto proporcionalna sa vremenom potrebnim za tuneliranje kroz potencijalnu barijeru. U graničnim slučajevima kada je $\gamma \ll 1$ mehanizam jonizacije jeste tuneliranje, dok u slučaju kada je ispunjeno $\gamma \gg 1$, tj. kada polje osciluje brzo u poređenju sa vremenom potrebnim za tuneliranje, jonizacija je multifotonska. Treba naglasiti da u principu u eksperimentima ovakva oštra podjela na mehanizme koji vode ka jonizaciji ne postoji. U većini eksperimenata brzina jonizacije se može okarakterisati kao kombinacija karakteristika koje potiču od ova dva mehanizma.

Pretpostavimo da imamo elektron vezan u atomu koji se nalazi u vanjskom linearno polarizovanom laserskom polju koje harmonijski osciluje. Označimo amplitudu oscilacija tog polja sa E_L . Koristeći izraze za širinu barijere I_P/E_L , potom brzinu elektrona kojom se kreće po svojoj atomskoj orbiti, $\sqrt{2I_P} = \kappa$ i vjerovatnost nalaženja elektrona u određenom smjeru, tj. smjeru minimalne širine barijere koja iznosi $1/(4\pi)$, možemo izračunati frekvenciju tuneliranja [16]

$$\omega_{\text{tuneliranja}} = \frac{1}{4\pi} \frac{2\pi}{\tau} = \frac{E_L \kappa}{2I_P} = \frac{E_L}{\kappa}, \quad (1.63)$$

gdje je τ vrijeme potrebno za tuneliranje. Koristeći jednačinu (1.62), za Keldyshev parametar dobijemo

$$\gamma = \frac{\omega_{\text{lasera}} \kappa}{E_L} = \sqrt{\frac{I_P}{2U_P}}, \quad (1.64)$$

gdje je U_P ponderomotorni potencijal².

²Radi se o energiji elektrona usrednjenoj po jednom optičkom ciklusu. Ovaj dio kinetičke energije elektrona potiče od oscilatornog kretanja elektrona. U slučaju linearno polarizovanog polja i u atomskim jedinicama, ponderomotorna energija je povezana sa frekvencijom lasera i amplitudom jačine laserskog polja izrazom $U_P = E_L^2/(4\omega^2)$. Više detalja vezanih za ponderomotornu energiju je navedeno u trećem poglavlju.

Poglavlje 2

Atomski procesi u jakom laserskom polju

Otkrićem lasera otvorena je jedna nova stranica u razvoju atomske i molekularne fizike. Istraživanja su bila potaknuta unutar mnogih oblasti nauke uporedo sa brzim razvojem laserske tehnike. Otkriveni su novi procesi koji nastaju pod uticajem laserskog zračenja. Osim toga, procesi koji su bili mogući i bez prisustva laserskog polja su uz njegovo prisustvo bili obogaćeni dodatnim karakteristikama. Takva istraživanja su omogućila i bolji uvid u samu strukturu mikrosvijeta, te su omogućila upotrebu novih tehnika u naučnim disciplinama kao što su holografija, telekomunikacije, fizika materijala, biologija, fizika plazme i druge.

Općenito, atomske procese koji se odigravaju u jakom laserskom polju možemo podijeliti u dvije grupe:

1. procese koji su mogući i bez prisustva laserskog polja (laser-assisted processes) i
2. procese koji su jedino mogući uz prisustvo jakog laserskog polja (laser-induced processes).

U suštini ove dvije vrste procesa se razlikuju odgovarajućom brzinom reakcije pri nižim vrijednostima intenziteta laserskog zračenja, tj. kada je perturbaciona teorija primjenljiva pri opisu ovih procesa. Jasno, ona je veća za procese uključene u prvu grupu. Da bi se odigrali procesi prve grupe neophodni intenziteti laserskog zračenja se kreću u opsegu od 10^8 do 10^{12} W/cm². Intenziteti u rasponu od 10^{12} do 10^{16} W/cm² su potrebni za ostvarivanje procesa druge grupe.

Procesi koji su mogući samo uz prisustvo laserskog zračenja predstavljaju glavno polje istraživanja multifotonske fizike. Zbog toga ćemo u ovom poglavlju, pored rasijanja elektrona na atomu, elektron-jonske rekombinacije i rasijanja X-zraka na atomu (laser-assisted processes), dati opis laser-induced

procesa koji su veoma bliski ATI procesu višeg reda (High-order ATI-HATI). To su generacija viših harmonika (High Harmonic Generation - HHG) i nesekvencijalna dvostruka jonizacija (NonSequential Double Ionization - NSDI).

2.1 Elektron-atomsko rasijanje

Elektron-atomsko rasijanje je jedan od prvih procesa koji je ispitivan odmah nakon otkrića lasera. Međutim, nakon prvobitnih poduhvata u izučavanju ovog procesa ona su na neki način zapostavljena na račun procesa koji se odvijaju samo uz prisustvo jakog laserskog polja.

Kada se elektron ubrza (uspori) električnim poljem on može da apsorbira (emituje) zračenje. Pošto u takvom procesu elektron prelazi iz jednog kontinuiranog stanja u drugo, takvi radijacioni prijelazi se nazivaju slobodno-slobodni prijelazi ili FFT (eng. Free-Free Transitions). Nas zanimaju stimulirani FFT procesi uzrokovani vanjskim elektromagnetnim poljem, kao što su stimulirani bremsstrahlung (emisija fotona) i inverzni bremsstrahlung (apsorpcija fotona). Spontani bremsstrahlung je zanemarljiv u jakim poljima. Općenito, procesi rasijanja uz, odnosno bez, prisustva vanjskog elektromagnetnog polja, se dosta razlikuju. Ako razmatramo elektron-atomsko rasijanje u laserskom polju, tada fotoni laserskog polja igraju ulogu trećeg tijela u procesu rasijanja. Usljed sudara elektrona (atoma) sa tim trećim tijelom u toku procesa rasijanja javljaju se tzv. off-shell amplitude elektron-atomskog rasijanja. Off-shell znači "izvan energetske površine", tj. da energija sistema elektron+atom nakon rasijanja nije jednaka energiji tog sistema prije rasijanja. To vodi na zaključak da je u toku procesa rasijanja dio energije razmijenjen sa laserskim poljem. Ipak, ukupna energija sistema elektron+atom+lasersko polje ostaje sačuvana. Off-shell efekti su poznati još od ranije iz nuklearne fizike u tzv. nuklearnom bremsstrahlungu, koji je povezan sa procesom off-shell proton-jezgro rasijanja [17]. Kako intenzitet laser-atomske interakcije i frekvencija laserskog polja mogu biti proizvoljni, to i odgovarajući off-shell efekti mogu biti značajni. Drugi efekat, koji se ne može opaziti u procesu elektron-atomskog rasijanja bez prisustva laserskog polja, je interferencija amplituda rasijanja. Na primjer, postoje dva kanala koji vode ka jednofotonskom inverznom bremsstrahlungu [10]. Elektron može apsorbirati foton direktno iz laserskog polja prilikom rasijanja na atomu koji se nalazi u osnovnom stanju. Ovo predstavlja prvi kanal reakcije. Drugi kanal je da prvo atom apsorbira foton (virtuelno) i da ga onda prenese elektronu u procesu rasijanja. Tada se elektron rasijava na atomu koji se nalazi u pobuđenom stanju. Interferencija amplituda za rasijanje elektrona na atomu u osnovnom i u pobuđenom stanju je relativno nov proces u

atomskoj fizici [11].

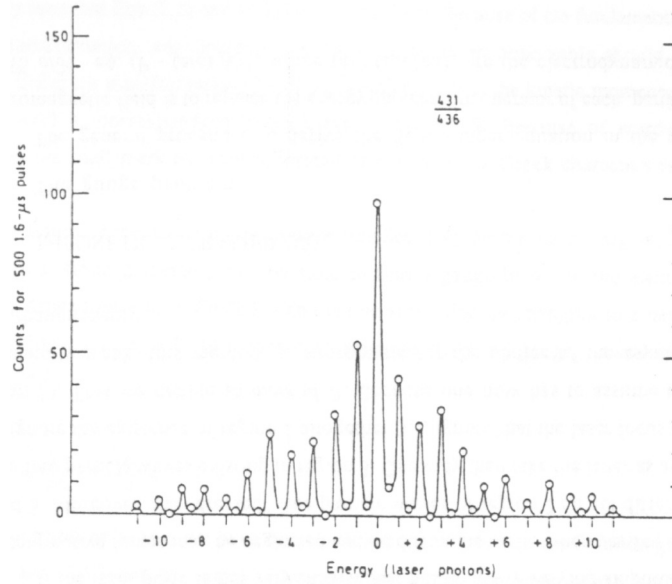
Ukratko ćemo se osvrnuti na pionirske eksperimente koji su donijeli važne informacije o FFT procesima. Istraživanja koja daju pouzdane informacije jesu eksperimenti sa snopovima (eng. beam experiments). U eksperimentu sa tri snopa, atomski snop se ukršta sa laserskim i elektronskim snopom, a rasijani elektroni se registruju pomoću detektora. Pri izvođenju opita treba voditi računa o tome da ne dođe do jonizacije atomskih meta prije njihove interakcije sa slobodnim elektronima. To se može izbjeći na dva načina: ili primjenom lasera manjih intenziteta zračenja ili primjenom lasera sa dovoljno kratkim pulsevima. Također je preporučljivo da se kao mete koriste atomi sa visokim jonizacionim potencijalom. Visoke intenzitete laserskog zračenja, odnosno kratke pulseve nije bilo moguće postići u početnoj fazi proučavanja procesa elektron-atomskog rasijanja u prisustvu laserskog polja, te je broj izvedenih eksperimenata veoma mali u poređenju sa odgovarajućim teorijskim razmatranjima.

Weingartshofer i saradnici su pored jednofotonskih FFT procesa, krajem sedamdesetih godina prošlog vijeka, uspjeli dokazati i postojanje višefotonskih FFT procesa [18, 19, 20, 21]. Svi eksperimenti su rađeni sa sličnom geometrijom rasijanja i eksperimentalnom opremom. Korišten je pulsirajući CO₂ laser intenziteta oko 10⁸ W/cm². Mete su bile atomi argona. Energije elektrona upadnog snopa su bile 11.72 eV i 15.80 eV, a uglovi rasijanja 153° i 155°. Usavršavajući godinama eksperiment, uspjeli su registrovati FFT procese koji uključuju emisiju i apsorpciju 11 fotona. Ovo je predstavljeno na slici 2.1, uz napomenu da kružići odgovaraju eksperimentalnim rezultatima. Nula na apscisi odgovara početnoj energiji elektrona, koja u ovom slučaju iznosi 15.80 eV. Desne, pozitivne vrijednosti broja laserskih fotona odgovaraju broju apsorbovanih fotona u datom procesu rasijanja, dok lijeva strana sa negativnim vrijednostima predstavlja broj emitovanih fotona. Bez daljnjeg ulaženja u detalje eksperimenta kažimo da se u ovom slučaju radi o neperturbativnom procesu.

Što se tiče teorijskih razmatranja problema, ona su se svodila na modifikaciju standardne teorije potencijalnog rasijanja. U tom slučaju je neophodno uključiti i parametre koji opisuju lasersko polje, kao što su jačina polja, frekvencija, polarizacija, intenzitet polja, itd. U radu [22] Bunkin i Fedorov su izveli izraz za diferencijalni presjek elektron-atom rasijanja u laserskom polju primjenom prve Bornove aproksimacije. Ovaj izraz je dat sa

$$\frac{d\sigma_{fi}^{B1}(L)}{d\Omega} = \frac{k_f}{k_i} J_L^2(x) \left(\frac{d\sigma_{fi}^{B1}}{d\Omega} \right)_{BL}. \quad (2.1)$$

Zadnji član u gornjem izrazu predstavlja diferencijalni presjek poten-



Slika 2.1: Eksperimenti Weingartshofera i saradnika [20, 21]. Prikazan je energetski spektar elektrona rasijanih na atomima Ar u snopu CO₂ lasera. Eksperimentalni rezultati su predstavljeni kružićima, koji su zbog bolje ilustracije spojeni punim linijama. Apscisa daje energiju rasijanih elektrona u jedinicama energije laserskih fotona ($\hbar\omega = 117$ meV), pri čemu nula odgovara početnoj energiji elektrona E_i , koja u ovom slučaju iznosi 15.80 eV. Ugao rasijanja je $\theta = 155^\circ$, a efektivni intenzitet laserskog polja 10^8 W/cm².

cijalnog rasijanja bez laserskog polja u prvoj Bornovoj aproksimaciji. S obzirom da posmatramo proces rasijanja uz prisustvo laserskog polja, energije elektrona u početnom i konačnom stanju, općenito nisu jednake, što znači da je rasijanje neelastično. Zbog toga se i pojavljuje faktor k_f/k_i ¹ koji je u slučaju elastičnog rasijanja jednak jedinici. Informacije vezane za lasersko polje su sadržane u Besselovoj funkciji prve vrste $J_L(x)$. Argument L predstavlja cijeli broj i odgovara apsorpciji fotona ($L > 0$), odnosno emisiji ($L < 0$). Nešto bolje slaganje teorije i eksperimenta postignuto je upotrebom Kroll-Watsonove formule [23] koja se dobije primjenom niskofrekventne aproksimacije pri razvoju matričnog elementa koji se javlja u izrazu za diferencijalni presjek rasijanja.

Najnovija razmatranja objavljena u radovima [24, 25] predviđaju postojanje plato strukture potencijalnog rasijanja u prisustvu, kako monohromatskog, tako i bihromatskog laserskog polja. Proces rasijanja je teorijski opisan pomoću Bornovog razvoja S -matričnog elementa, pri čemu su uzeta

¹Ove veličine karakteriziraju impulse elektrona u konačnom i početnom stanju, respektivno.

prva dva člana u razvoju. Lasersko polje je opisano unutar granica klasične fizike, dok je elektron posmatran kvantno-mehanički. Potencijal je predstavljen kao suma statičkog i polarizacionog. Prikazan je i kvantno-mehanički i poluklasični opis procesa. Prvi zapaženi plato potiče od direktnog rasijanja, dok je drugi vezan za proces dvostrukog rasijanja. Predstavimo numeričke rezultate za slučaj potencijalnog rasijanja u linearno polarizovanom monohromatskom laserskom polju [24]. Na slici 2.2 je prikazan diferencijalni presjek rasijanja (izražen u atomskim jedinicama) kao funkcija broja fotona n , razmijenjenih sa laserskim poljem. Atom je He. Intenzitet laserskog polja je $I = 5.7 \cdot 10^{14} \text{ W/cm}^2$, a talasna dužina lasera je $\lambda = 800 \text{ nm}$. Energija upadnih elektrona je $E_{k_i} = 13 \text{ eV}$, a ugao rasijanja, definisan kao ugao između impulsa rasijanog elektrona i smjera vektora polarizacije laserskog polja, je $\theta_f = 0^\circ$. Doprinos samo direktnog rasijanja (tj. prva Bornova aproksimacija) je prikazan iscrtkanom linijom, koja je označena sa D. Direktno rasijanje je odgovorno za prvi plato koji ima odsijecanje (cutoff) oko vrijednosti $n = 100$. Drugi plato je za 6 do 7 redova veličine niži i ima cutoff oko vrijednosti $n = 200$. Usporedbom sa poluklasičnom analizom dolazi se do zaključka da ovaj drugi plato potiče od dvostrukog rasijanja. Semiklasični pristup daje sljedeći zakon cutoffa drugog platoa

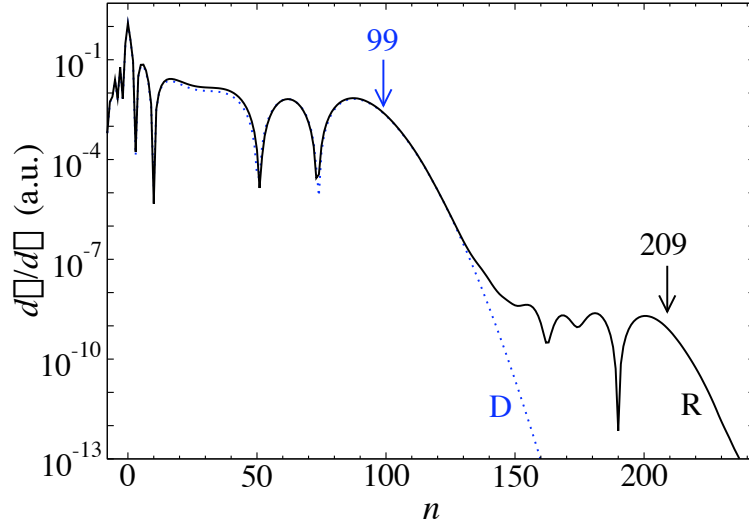
$$n\omega_{\max} = 10.007U_P - 1.184E_{k_i}, \quad (2.2)$$

uz pretpostavku da je ugao rasijanja, definiran prethodno, jednak nuli. Ako je pak ugao rasijanja π , tada u gornjoj relaciji 1.184 treba zamjeniti sa 1.172.

Na kraju ovog odjeljka naglasimo da, za razliku od HHG-a ili HATI procesa, gdje je drugi plato i eksperimentalno opažen, u slučaju potencijalnog elektron-atom rasijanja izloženi teorijski rezultati nisu popraćeni odgovarajućom eksperimentalnom potvrdom.

2.2 Generacija viših harmonika

Interakcija jakog laserskog polja i atoma, općenito, vodi ka visoko nelinearnim procesima. Jedan takav proces je i generacija viših harmonika. Pored HATI-ja ovo je najistraživaniji atomski proces koji nastaje u prisustvu jakog laserskog polja. Shore i Knight su 1987. godine predvidjeli mogućnost da visokoenergetski elektron, nastao jonizacijom iznad praga, može da se vrati u osnovno stanje i tako proizvede harmonike veoma visokog reda [26]. Frekvencije emitovanih harmonika, jasno, predstavljaju cjelobrojne multiple frekvencije laserskog polja. Eksperimentalna opažanja HHG su uslijedila veoma brzo, i to sa širokim opsegom upotrebljenih talasnih dužina i intenziteta

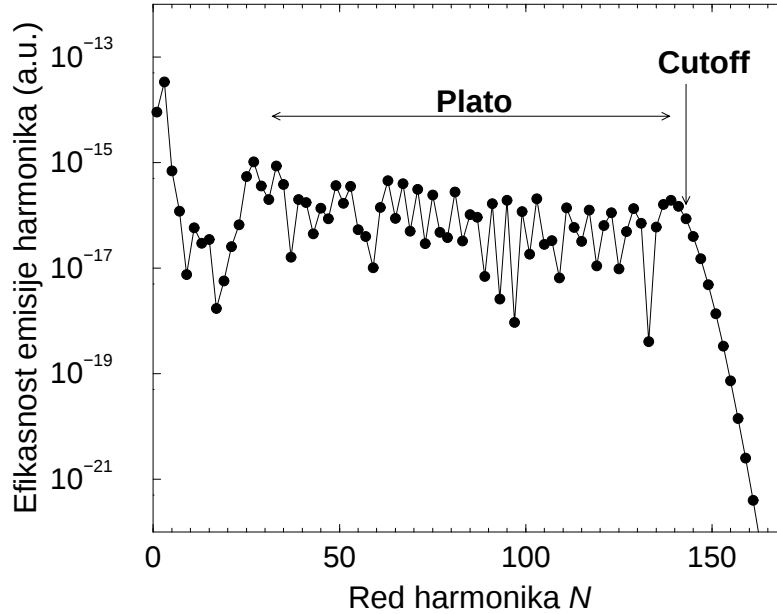


Slika 2.2: Diferencijalni presjek kao funkcija broja fotona n , razmijenjenih sa laserskim poljem, za slučaj potencijalnog rasijanja elektrona početne kinetičke energije $E_{k_i} = 13$ eV na atomima He u prisustvu monohromatskog linearno polarizovanog laserskog polja talasne dužine $\lambda = 800$ nm i intenziteta $I = 5.7 \cdot 10^{14}$ W/cm². Pretpostavljeno je da je impuls upadnog elektrona $\mathbf{k}_i$ istoga smjera kao i vektor polarizacije laserskog polja, dok je za ugao između impulsa rasijanog elektrona i smjera vektora polarizacije laserskog polja uzeta vrijednost $\theta_f = 0^\circ$. Diferencijalni presjek je izražen u atomskim jedinicama [24].

laserskog zračenja. Jedan od prvih eksperimenata čiji rezultati potvrđuju teorijske pretpostavke u [26] je publiciran u radu [27]. Dobiveni su harmonici do 33 reda, pri intenzitetima koji su reda veličine kao i oni u prvim ATI eksperimentima. HHG spektar (pogledati sliku 2.3) je karakteriziran naglim padom vjerovatnosti za niže harmonike, potom slijedi široki plato sa približno istom vjerovatnošću za naredne redove harmonika, da bi se isti završio sa naglim padom pri određenom redu harmonika, koji označavamo kao cut-off. Opaženi su samo neparni harmonici kao posljedica kvantno-mehaničkih izbornih pravila i simetrije potencijala. Ako se naruši ta simetrija, kao na primjer u prisustvu vanjskog statičkog električnog polja [28], onda je moguća emisija i parnih harmonika. U nedavno obavljenim eksperimentima energije fotona dostižu vrijednosti i po nekoliko stotina eV, a odgovarajući red harmonika je i iznad 300.

U slučaju linearno polarizovanog polja, određene frekvencije ω , cutoff ili maksimalna energija emitovanog fotona je data sa semiklasičnom formulom (u SI jedinicama)

$$N_{\max} \hbar \omega \approx I_p + 3.17 U_P, \quad (2.3)$$

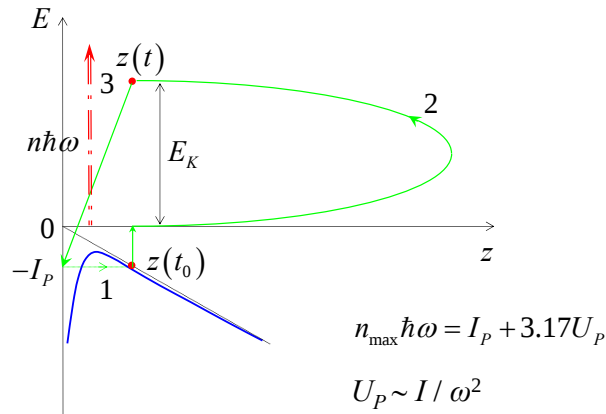


Slika 2.3: Efikasnost emisije harmonika kao funkcija reda harmonika N za proces generacije viših harmonika pomoću atoma He ($I_P = 24.588$ eV) i linearno polarizovanog Ti:Safir lasera talasne dužine $\lambda = 800$ nm i intenziteta $I = 10^{15}$ W/cm². Predstavljeni rezultati su dobiveni primjenom metode u kome je lasersko polje smatrano klasičnim, a polje harmonika kvantnim. Područje platoa i njegov završni dio, cutoff, su označeni na slici [46].

gdje je $N_{\max}$ maksimalni red harmonika, I_P jonizacioni potencijal atoma, a U_P ponderomotorna energija elektrona. Kvantno-mehanička popravka vodi ka izrazu u kojemu je faktor ispred jonizacionog potencijala neznatno veći od jedinice [29]. Odgovarajući izrazi za cutoff u slučaju eliptički polarizovanog polja, između ostalog i kao funkcije elipticiteta su izvedeni u radu [30].

Proces generacije viših harmonika, kao i drugi procesi u jakom laserskom polju, može biti opisan semiklasičnim modelom tri koraka (eng. three-step model) [31]. U skladu sa ovim modelom, atom je jonizovan procesom tuneliranja (korak 1). Jonizovani elektron se kreće u jakom laserskom polju, te se pod njegovim uticajem vraća ka roditeljskom jonu (korak 2). Pri povratku u osnovno stanje emituje se foton velike energije (korak 3). Prikaz modela tri koraka u slučaju HHG-a je prikazan na slici 2.4. Na slici su prethodno pomenuti koraci označeni sa 1, 2 i 3, respektivno. Atom koji ima jonizacionu energiju I_P se nalazi u svom osnovnom stanju u trenutku kada uključimo lasersko polje. Atomski potencijal biva nadvladan superpozicijom Coulombovog polja i laserskog polja, tako da atom može biti jonizovan ili procesom

tuneliranja ($\gamma \ll 1$) ili procesom multifotonske jonizacije ($\gamma \gg 1$). Elektron je oslobođen na poziciji $\mathbf{r}(t_0)$ sa brzinom $\mathbf{v}_0$, najčešće uz pretpostavku da su obje vrijednosti nula². Slobodni elektron se sada kreće u laserskom polju sa kinetičkom energijom E_k . Kada se elektron vrati na mjesto svog oslobađanja ($\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$), može doći do rekombinacije pri kojoj će biti emitovan harmonijski foton energije $n\hbar\omega$. Maksimalna kinetička energija elektrona u trenutku rekombinacije, u slučaju linearno polarizovanog polja, iznosi $3.17U_p$ ³. Pretpostavljajući da sva kinetička energija može biti dodana jonizacionom potencijalu u trenutku kada foton biva emitovan, daje nam jednostavno kvalitativno objašnjenje za gore prikazani zakon odsijecanja.



Slika 2.4: Šematska prezentacija generacije viših harmonika u skladu sa modelom tri koraka. Lasersko polje je linearno polarizovano duž z -ose. Brojevi 1, 2 i 3, označeni na slici, predstavljaju karakteristične korake ovog modela. E -osa izražava energiju elektrona [46].

Postoje brojna pojednostavljenja u modelu “tri koraka” [14]. Na primjer, zanemarivanje uticaja potencijala preostalog jona na kretanje elektrona u laserskom polju. Također je pretpostavljeno da elektronske putanje imaju ishodište pri jonskoj jezgri, iako u stvarnosti pri procesu tuneliranja ishodište

²To odgovara pretpostavci da je elektron apsorbirao minimalan broj fotona $N = N_0$ koji mu je potreban za jonizaciju.

³Pogledati naredno poglavlje, odjeljak 2.

se nalazi na određenoj distanci naspram jonske jezgre. Osim toga, pomenimo i kvantno-mehaničke efekte kao što su širenje talasnog paketa i interferencija ili osiromašenje osnovnog stanja, a koje ovaj semiklasični model ne uzima u obzir. Međutim, ključne kvalitativne karakteristike procesa generacije viših harmonika je moguće objasniti i opisati pomoću ovog modela.

Prije nego iznesemo i ostale pristupe koji služe opisu HHG procesa, navedimo da ih u osnovi možemo podijeliti u dvije grupe. U prvu grupu spadaju oni modeli koji razmatraju samo reakciju jednog atoma na primjenjeno lasersko polje. U takve pristupe spada i prethodno izloženi metod. Međutim, kompletna teorija bi trebala uključiti i makroskopski odgovor sredine na koju djelujemo jakim laserskim poljem. To bi predstavljalo odgovor sistema, tj. koherentnu emisiju svih atoma ozračene sredine u laserskom fokusu. U tom slučaju je potrebno riješiti Maxwelllove jednačine za osnovno, dakle lasersko polje, i polje harmonika. Ovo je tzv. teorija propagacije iznesena u radu [32]. Iskažimo jedan bitan detalj unutar makroskopskog pristupa HHG-a. Za maksimalan prijenos energije lasera ka harmonijskom talasu odgovarajućeg reda i jačine polja, harmonici bi trebali ostati u fazi sa upadnim laserskim zračenjem određene polarizacije. Drugim riječima, proces bi trebao biti fazno podešen (eng. phase-matching) [33]. Idealno fazno podešavanje HHG-a nije nikada postignuto u gasovima. Naime, nakon kratkog rastojanja poznatog kao koherentna dužina, dva polja se razlikuju u fazi za π , te se energija harmonijskog vala naglo reducira na energiju primjenjenog laserskog polja. Bez daljnjeg razmatranja ovog pristupa, recimo da pri dovoljno velikim intenzitetima laserskog polja parametri koji određuju fazno podešavanje se mogu smatrati konstantnim, tako da fazno podešavanje nije ni potrebno. Tada reakcija jednog atoma diktira makroskopski signal [14].

Jedan od numeričkih pristupa opisu procesa koji uvažava makroskopske aspekte problema je vremenski zavisna funkcionalna teorija gustine [34] i pokazala se kao veoma korisna. Korišteni su i pristupi dinamike kvantnih fluida [35] kao i hidrodinamički model i varijanta Thomas-Fermi modela [36]. Navedimo ukratko i ključne numeričke pristupe opisu HHG-a koji uključuju samo reakciju jednog atoma na upotrebljeno lasersko polje. Numerički metodi bazirani na Floquetovoj teoriji su razmatrani u radu [37]. Metod direktne integracije trodimenzionalne vremenski zavisne Schrödingrove jednačine je započeo Kulander [38], da bi kasnije bio razvijen uz korištenje boljih kodova (pogledati revijalni rad [14] i reference unutar njega).

Veliki nedostatak navedenih numeričkih pristupa iz obje grupe je zahtjev za velikom memorijom, kao i vrijeme trajanja proračuna. Pri komplikovanim slučajevima poluanalitički pristupi su mnogo korisniji. Polua-

nalitički pristupi bazirani na aproksimaciji jakog polja⁴ (SFA) su razvijeni u radovima [29, 39, 40, 41]. Harmonijski spektar je dobiven kao Fourier transformat realnog vremenski zavisnog efektivno-dipolnog matričnog elementa. Očekivana vrijednost ovog elementa bi bio osnovni član pri integraciji Maxwelllove jednačine. Međutim, u slučaju razmatranja emisije harmonika jednog atoma S -matrični element je posmatrana veličina umjesto prethodno pomenutog efektivno-dipolnog matričnog elementa. Prvi pokušaj primjene S -matrične teorije je prikazan u radu [42]. U radu [43] su izložene razlike između S -matričnog pristupa i onog koji je vezan za makroskopski aspekt samog procesa. Pored razlika između dva pristupa, općenito, poluanalitički pristupi opisu HHG procesa se mogu razlikovati i na osnovu toga da li lasersko polje i polje harmonika posmatramo klasično ili sa stanovišta kvantne elektrodinamike. Jasno, ovo posljednje bi uključivalo operatore uništavanja i kreiranja fotona. Oba polja su tretirana klasično u radovima [29] i [39] gdje je posmatran pristup koji uključuje efektivni dipol, odnosno u [44] gdje se koristio S -matrični pristup koji vodi ka kompleksnom vremenski zavisnom matričnom elementu. U radu [45] oba polja su tretirana u okviru formalizma kvantne elektrodinamike, a sam opis HHG procesa je analiziran kao vremenski nezavisan proces rasijanja. Pogodnim transformacijama može se uvesti vremenska zavisnost procesa koja dopušta interpretaciju problema preko modela “tri koraka”. U radu [46] korišten je kombinovani pristup. Lasersko polje je razmatrano unutar klasične teorije, dok je polje harmonika predstavljeno preko principa kvantne elektrodinamike. Ovakav pristup je opravdan pošto je kvantno-elektrodinamički tretman elektromagnetnog polja, uzet u aproksimaciji laserskog polja⁵, ekvivalentan klasičnom pristupu opisa ovog problema [11].

Na kraju navedimo nekoliko bitnih osobina emitovanih harmonika. Energija fotona emitovanih viših harmonika je i do nekoliko stotina puta veća nego energija fotona upotrebljenog laserskog polja. Također, trajanje pulsa harmonika je dosta kraće nego je to vrijeme trajanja pulsa laserskog polja. Upravo zbog toga, harmonici dobiveni HHG procesom posjeduju interesantne prostorno-vremenske karakteristike, te na taj način predstavljaju veliki potencijal za široku upotrebu. Za aplikaciju je neophodno kontrolisati emisiju harmonika i pojačati intenzitet emitovanih harmonika. Koncept kvantnih orbita⁶ je veoma koristan u pomenutom kontekstu. Metod je koristan i pri

⁴Aproksimacija u kojoj se pretpostavlja da su stanja oslobođenog elektrona između trenutka jonizacije i rekombinacije izvan uticaja potencijala preostalog jona, tj. kretanje elektrona se odvija samo pod uticajem laserskog polja.

⁵Aproksimacija koja uzima u obzir veliki broj fotona po modu laserskog polja.

⁶Koncept je zasnovan na primjeni aproksimacije sedlaste tačke (eng. Saddle-Point Method, SPM) pri proračunu petodimenzionalnog integrala koji se pojavljuje u S -

opisu HHG-a u složenijim laserskim poljima, kao što je eliptički polarizovano [47, 48], potom bihromatsko [49] i bicirkularno polje [50]. Isti je koristan i pri opisu kvantno-mehaničkih efekata vidljivih u spektru HHG-a [51].

U posljednjih par godina učinjen je značajan progres u razvoju izvora zračenja visokog intenziteta u vakuumu, i to u krajnjem ultravioletnom dijelu spektra i području mekih X-zraka. U takve uređaje spadaju: laseri X-zraka, sinhrotroni, laseri zasnovani na slobodnim elektronima i izvori harmonika visokog reda. Među njima prednost, ipak, imaju ovi posljednji radi relativne jednostavnosti njihove upotrebe. Osim toga, samo izvori HHG-a obezbjeđuju ultrakratke pulseve velikog intenziteta u pomenutoj spektralnoj regiji. Stoga su primjene izvora ovog zračenja brojne. Pomenimo ovdje nelinearne procese u XUV regiji, kao što su dvo- i tro-fotonska jonizacija rijetkih gasova [52], vremenski rezolutna spektroskopija X-zraka čvrstog stanja i molekularna dinamika na ispod 100 fs vremenskoj skali [53] i interferometrijska mjerenja u ekstremno ultravioletnom (EUV) području spektra [54]. Jedna od najvažnijih primjena HHG-a je atofizika. A. Zewail je dobio Nobelovu nagradu za hemiju za potvrdu mogućnosti da je tehnikama ultrabrzih femtosekundnih lasera moguće pratiti kretanje atoma unutar molekula pri određenoj hemijskoj reakciji [55]. Atosekundni pulsevi za atomsku fiziku imaju takav značaj kao što femtosekundni pulsevi imaju u hemiji.

2.3 Nesekvencijalna dvostruka jonizacija

Kako smo već ranije pomenuli elektron, oslobođen procesom jonizacije iznad praga može, pod uticajem laserskog polja, da se vrati ka matičnom jonu. Pri tom naknadnom povratku može doći do rekombinacije što vodi ka generaciji viših harmonika, procesu koji je opisan u prethodnom odjeljku. Elastično rasijanje elektrona na jonu vodi ka HATI procesu koji je i glavna tema ovog magistarskog rada. Međutim, neelastično rasijanje, pri kojem dolazi do oslobađanja drugog elektrona predstavlja proces nesekvencijalne dvostruke jonizacije (eng. NonSequential Double Ionization, NSDI). Proces se može opisati formalizmima koji su korišteni i pri opisu HHG-a, odnosno HATI-ja. NSDI nije opažen bez prisustva laserskog polja.

Prvi eksperiment [56] u kome je zabilježen iznenađujuće velik doprinos dvostruko nabijenih jona kao funkcija intenziteta lasera je izveden 1983.

matričnom elementu. Trodimenzionalna integracija ide po impulsu međustanja jonizovanog elektrona, jedan integral po vremenu jonizacije i preostala kvadratura se odnosi na trenutak rekombinacije. Kako je koncept kvantnih orbita veoma moćan alat pri opisu atomskih procesa u jakom laserskom polju, to ćemo više detalja predstaviti u narednim poglavljima.

godine. Jasno, ovi rezultati su bili nespojivi sa mogućnošću sekvencijalne jonizacije. Tek nakon što su izvršeni eksperimenti [57, 58] u kojima je bilo moguće mjeriti impuls jona nakon sudara, moglo se doći do zaključka da je naknadni povratak elektrona ka matičnom jonu i neelastično rasijanje na istom glavni mehanizam koji uzrokuje opažene doprinose dvostruko nabijenih jona. Posebno osjetljiv test za postojanje mehanizma naknadnog neelastičnog rasijanja je poređenje između doprinosa jona dobivenih korištenjem linearno, odnosno cirkularno polarizovane svjetlosti. U slučaju cirkularno polarizovanog polja elektron prije teži da zaobiđe matični jon nego da se na njemu neelastično rasiye, što dovodi do naglog pada doprinosa dvostruko nabijenih jona u odnosu na slučaj kada je korišteno linearno polarizovano polje [59].

NSDI može biti opisan modelom “tri koraka”. Kao i ostali srodni procesi i ovaj je čisto kvantno-mehanički proces sve dok se elektron ne nađe u kontinuumu ili tuneliranjem ili multifotonskom jonizacijom (prvi korak). Međutim, sve što se dešava nakon prvog koraka jonizacije iznad praga, kao što je naknadno ubrzavanje oslobođenog elektrona laserskim poljem ili eventualno rasijanje (elastično ili neelastično) na matičnom jonu, može biti posmatrano i opisano jako dobro u okvirima klasične fizike. Ovo posebno važi kada je intenzitet laserskog zračenja dovoljno velik. U ovom odjeljku ćemo upravo razmotriti dopuštene vrijednosti energije jonizovanih elektrona u pomenutom procesu u okviru klasične fizike. Ukratko ćemo se osvrnuti i na kvantno-mehanički pristup problemu, tj. S -matričnom formalizmu pri opisu NSDI-a.

Povezana elektron-jon spektroskopija, a posebno mikroskopska tehnika reakcije [60] je eksperimentalna metoda koja je omogućila da se registruje višestruki diferencijalni presjek rasijanja NSDI-a, npr. spektar ugaone raspodjele energije elektrona ili recimo distribucija impulsa dva elektrona paralelna sa osom polarizacije laserskog polja. To nam omogućava usporedbu dobivenih rezultata sa teorijskim proračunima koje ćemo navesti.

Razmatramo linearno polarizovano polje. Impulsi elektrona oslobođenih pri NSDI-u, unutar granica klasične fizike, zadovoljavaju tri uslova iskazana preko odgovarajućih jednačina. Prva od njih nam govori da je jedan elektron oslobođen tuneliranjem u nekom trenutku t_0 , dok druga jednačina opisuje činjenicu da se u određenom trenutku t_1 isti vratio ka matičnom jonu te, pri neelastičnom rasijanju, oslobodio drugi elektron dajući mu dovoljan iznos energije za savladavanje drugog jonizacionog potencijala. Treća jednačina daje uslov povratka elektrona ka matičnom jonu. Rješavajući takav sistem nelinearnih jednačina dobiju se rezultati prikazani na slikama 2.5 i 2.6 [61]. Na njima su predstavljene energije i momenti elektrona kao funkcije $|E_{02}|/U_P$, tj. drugog jonizacionog potencijala skaliranog sa ponderomotornom energijom.

Vidimo da rješenja postoje samo uz uslov

$$|E_{02}| \leq 3.17U_P. \quad (2.4)$$

Rezultat je očekivan jer maksimalna kinetička energija prvog elektrona u trenutku povratka matičnom jonu iznosi, kao što je već rečeno, $3.17U_P$. Također, sa slike 2.5 vidimo da je kinetička energija prvog elektrona emitovanog u pravcu ose polarizacije polja data sa $E_{p1\parallel\max} \approx 10U_P$ za $|E_{02}| \approx 0$, što je u saglasnosti sa klasičnim cutoffom u slučaju HATI procesa⁷. Ovo je slučaj kada se prvi elektron pri povratku rasijao pod uglom od 180° i predao drugom elektronu minimalnu energiju koja odgovara vrijednosti $|E_{02}|$, da bi ovaj zadnji konačno prešao u kontinuum. Sa povećanjem $|E_{02}|$ maksimalna energija $E_{p1\parallel\max}$ postepeno opada i dostiže drugu elektronsku energiju, koja je skoro nezavisna od $|E_{02}|$ i približno iznosi $2U_P$. U opsegu $|E_{02}| < 2.5U_P$, jednostavan izraz za cutoff je

$$E_{p1\parallel\max} = 10.0U_P - 2.0|E_{02}|. \quad (2.5)$$

Ovaj cutoff je primjenljiv u pomenutoj oblasti sa tačnošću boljom od 4%.

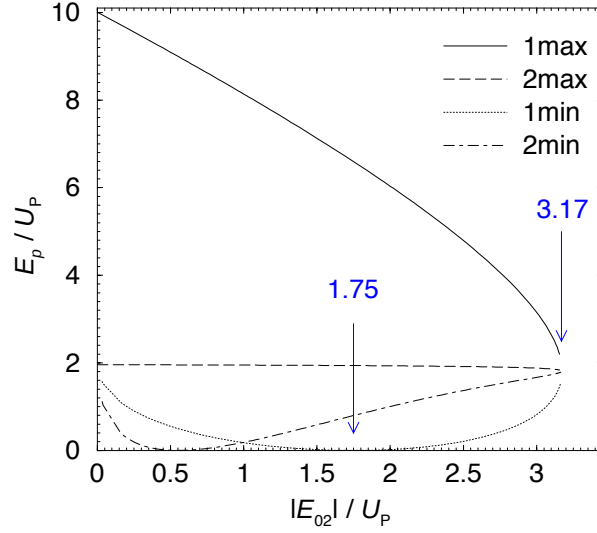
Fizikalno značenje drugog rješenja koje predstavlja ekstremum je bolje naglašeno na slici 2.6. Zajedno sa prvim rješenjem, ono određuje interval klasično dopuštenih impulsa koji su ujedno paralelni sa osom polarizacije laserskog polja. Za male vrijednosti $|E_{02}|$ ili veće vrijednosti intenziteta laserskog zračenja, ovaj interval je širi i proteže se od negativnih ka pozitivnim vrijednostima. Sa porastom odnosa $|E_{02}|/U_P$, on postaje uži. Za $|E_{02}| > 1.75U_P$, postoji interval odgovarajućeg impulsa elektrona koji je kinematički zabranjen.

Rješenja problema u slučaju kada oba elektrona imaju iste vrijednosti impulsa, te su paralelni sa osom polarizacije polja, su prikazana na slikama 2.7 i 2.8. Kada je ispunjen uslov $|E_{02}| < 2.5U_P$, odgovarajući zakon odsijecanja može biti aproksimiran sa sljedećim izrazom

$$E_{p1\parallel\max} = E_{p2\parallel\max} = 7.0U_P - 1.2|E_{02}|, \quad (2.6)$$

ponovno sa preciznošću boljom od 4%. U radu [62] je odgovarajući zakon odsijecanja izveden korištenjem formalizma kvantne mehanike. Polazna osnova bila je S -matrica koja uključuje i povratak elektrona matičnom jonu, te mehanizam neelastičnog rasijanja koje vodi ka NSDI-u. Razvoj matričnog

⁷Maksimalna kinetička energija HATI elektrona, dobivena klasičnim razmatranjima iznosi $10.007U_P$. Za detaljniji pristup i obrazloženje pogledati prvi odjeljak narednog poglavlja.



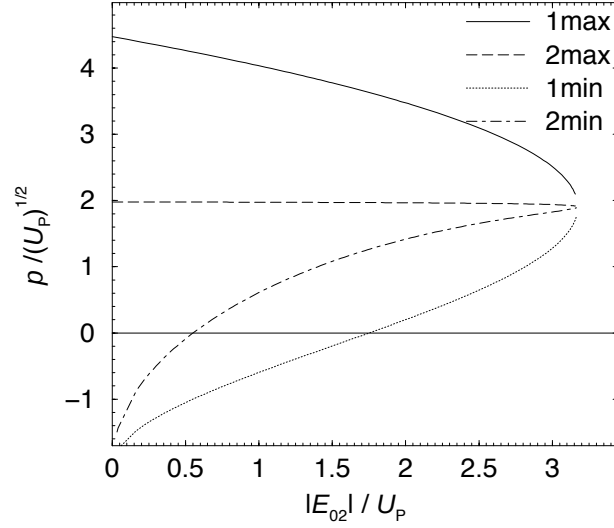
Slika 2.5: Opseg klasično dopuštenih energija elektrona (skaliranih po U_P) kao funkcija drugog jonizacionog potencijala, također skaliranog po U_P . Pretpostavlja se da je elektron emitovan u pravcu laserskog polja. Punom linijom je naznačena maksimalna, a sa tačkastom minimalna vrijednost klasično dopuštene kinetičke energije prvog elektrona. Odgovarajuće energije drugog elektrona su date sa iscrtkanom linijom (maksimalna), odnosno sa linijom tačka-crta (minimalna) [61].

elementa je izveden po članovima koji predstavljaju generalizovane Besselove funkcije. Uz uslov da je ispunjeno $|E_{02}| \ll U_P$ zakon odsijecanja glasi

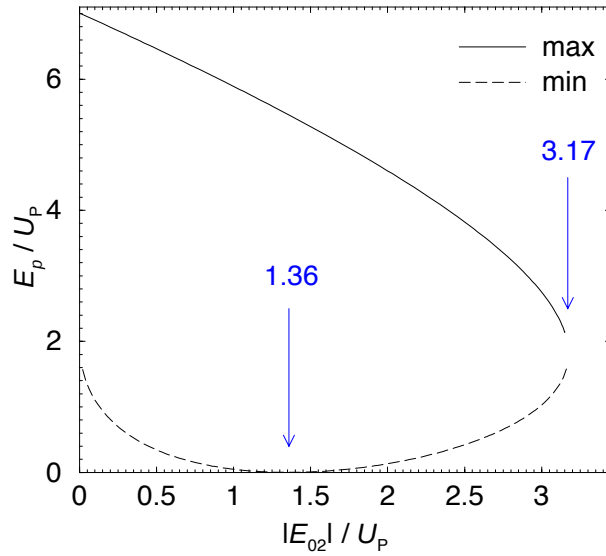
$$E_{p_{1\parallel\max}} = E_{p_{2\parallel\max}} = 5.8U_P - 1.2|E_{02}|. \quad (2.7)$$

Vratimo se izrazu (2.6). Maksimalna energija data sa (2.6) je logično ispod vrijednosti maksimalne energije date sa (2.5). Slika 2.8 prikazuje klasično dopušteni opseg impulsa u ravni $(p_{1\parallel}, p_{2\parallel})$. Ova regija predstavlja jednu povezanu oblast (uključujući i ishodište) u slučaju kada je ispunjeno $|E_{02}| \leq 1.36U_P$.

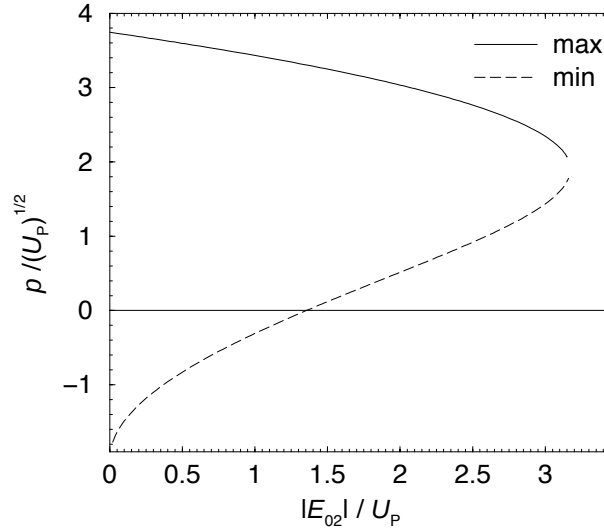
Poredeći cutoffove sa slikom i njihove aproksimativne izraze (2.5) i (2.6) sa dostupnim podacima treba naglasiti da ovi izrazi daju kinematičke granice klasično dopuštene oblasti. Dinamika odgovarajućeg atoma može obezbijediti da su ove granice stvarno dostignute. Još jednom naglasimo da granice klasičnog razmatranja gube na značaju kada intenzitet laserskog zračenja padne na ili ispod klasičnog praga, tako da je ispunjeno $3.17U_P < |E_{02}|$. Što se tiče poređenja sa eksperimentalnim podacima, slaganje je dobro kada je intenzitet laserskog polja visok [63], te kada je glavni mehanizam koji doprinosi NSDI-u mehanizam naknadnog povratka i neelastičnog rasijanja.



Slika 2.6: Opseg klasično mogućih impulsa elektrona skaliranih po $\sqrt{U_P}$. Na slici je prikazana samo pozitivna grana, pošto vrijedi simetrija $p \rightarrow -p$. Simboli imaju isto značenje kao oni na slici 2.5 [61].



Slika 2.7: Maksimalna (puna linija) i minimalna (iscrtkana linija) kinetička energija elektrona skalirana po U_P kao funkcija drugog jonizacionog potencijala, također skaliranog po U_P . Pretpostavlja se da su impulsi oba elektrona jednakih vrijednosti, te da su paralelni, tj. vrijedi $p_{1\parallel} = p_{2\parallel}$, $\mathbf{p}_{1\perp} = \mathbf{p}_{2\perp}$ [61].



Slika 2.8: Slično kao na slici 2.7, samo što u ovom slučaju funkciju predstavljaju dopušteni impulsi elektrona skalirani po $\sqrt{U_P}$ [61].

Naime, ovaj proces može biti praćen i ekscitacijom i tuneliranjem [64], a što nije uključeno u klasični opis nesekvencijalne dvostruke jonizacije.

Detaljan kvantno-mehanički opis procesa je naveden u radovima [65, 66, 67, 68]. Uglavnom je korištena SPM aproksimacija. Formalizam kvantnih orbita je predstavljen u radu [69]. Unutar klasično dopuštenog opsega impulsa, doprinos spektru je jako oscilirajući kao posljedica interferencije doprinosa dviju vodećih kvantnih orbita. Izvan klasične oblasti doprinos se veoma brzo gubi. Elektron-elektron interakcija je tretirana u okviru Bornove aproksimacije i ignoriše interakciju između prvog elektrona pri povratku i jona. Zamjenjujući elektron-elektron Coulombovu interakciju sa tročestičnim kontakt potencijalom, kako je urađeno u [69], može biti interpretirano kao korištenje efektivne elektron-elektron interakcije koja djelomično iskazuje prisustvo matičnog jona. Međutim, bez obzira na takav pristup, uticaj jona na orbitu prvog elektrona između trenutka jonizacije i ponovnog povratka ostaje neadekvatno iskazan.

Inače, Coulombovo refokusiranje utiče na duge orbite pri povratku, tako da “vode” prvi elektron ka neelastičnom rasijanju prije nego zaobilazanju jona [70, 71]. Jasno, to vodi ka pojačanju doprinosa spektru. Čak i bez uključivanja efekta Coulombovog refokusiranja, kvantne orbite sa dugim vremenima putovanja mogu doprinjeti značajnom pojačanju doprinosa dijelu

spektra. To je opet povezano, slično kao i kod ostalih atomskih procesa⁸ u laserskom polju, sa strogo određenom vrijednošću intenziteta koja vodi ka efektu zatvaranja kanala [72].

2.4 Elektron-jonska rekombinacija

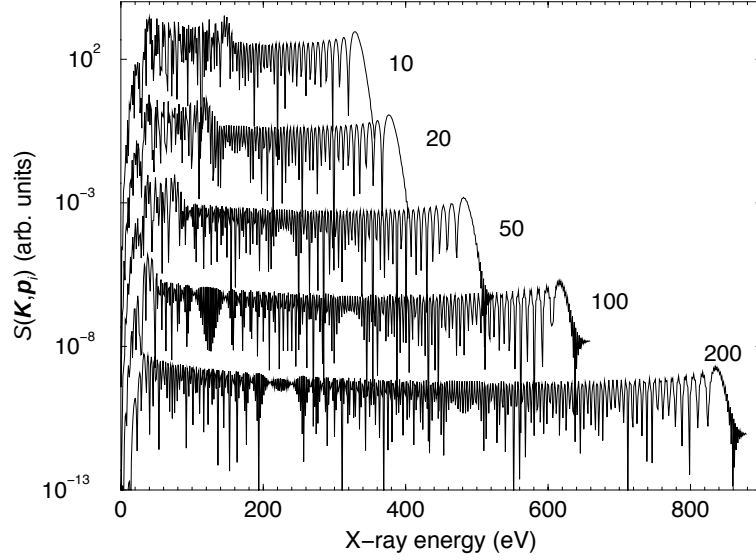
Radi se o procesu koji je bio poznat i prije otkrića lasera (pogledati revijalni rad [46] i reference unutar njega). Nas interesuju odgovarajući procesi koji se odvijaju u prisustvu jakog laserskog polja. Na primjer, jedan od procesa koji je odgovoran za emisiju visokoenergetskih fotona pri laserskom zagrijavanju plazme je elektron-jonska rekombinacija u laserskom polju, ili kraće LAR (Laser-Assisted Recombination) [73].

U direktnom LAR-u [73, 74] upadni elektron sa impulsom $\mathbf{p}_i$ i kinetičkom energijom $E_{\mathbf{p}_i}$ rekombinira se sa jonom dajući vezano atomsko stanje E_B . Tokom ovog procesa visokoenergetski foton frekvencije $\omega_{\mathbf{k}}$ je emitovan, a nakon n fotonske izmjene elektrona sa laserskim poljem koje ima frekvenciju ω i visok intenzitet. Međutim, može se desiti da se upadni elektron prvo rasije na jonskom potencijalu, potom nastavi kretanje u laserskom polju, te naposljetku, nakon što polje promijeni svoj smjer, i vrati elektron ka jonu nastane proces rekombinacije. Ovaj proces se označava skraćenicom SLAR, gdje slovo S naznačuje odgovarajuće rasijanje (“Scattering”). Ovaj proces je detaljno analiziran u [75].

Na slici 2.9 su predstavljeni numerički rezultati za diferencijalni spektar LAR procesa kao funkciju energije X-zraka u slučaju linearno polarizovanog polja [76]. Meta su bili atomi He. Intenzitet polja Nd:YAG lasera je imao vrijednost 10^{15} W/cm². Upadne energije elektrona su $E_{\mathbf{p}_i} = 10, 20, 50, 100$ i 200 eV. Vidimo da pozicija cutoffa jako zavisi od energije upadnog elektrona. Najveći je za $E_{\mathbf{p}_i} = 200$ eV (donja kriva). Sve naredne krive su pomaknute za tri reda veličine radi vidljivosti. Sa padom vrijednosti $E_{\mathbf{p}_i}$ struktura na lijevoj strani spektra postaje složenija.

Direktni proces rekombinacije elektrona sa jonom u prisustvu jakog laserskog polja, praćen emisijom X-zraka (fotona) karakterisanih valnim vektorom $\mathbf{K}$, frekvencijom $\omega_{\mathbf{K}}$ i jediničnim vektorom polarizacije $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}$, je opisan poluklasično u radu [76]. Takva analiza procesa podrazumijeva analizu jednačina dobivenih primjenom SPM aproksimacije pri rješavanju integrala unutar datog kvantno-mehaničkog izraza za S matricu. Ovaj metod je dosta uspješno primijenjen i na ostale procese, a kako bi se petodimenzionalni integral u amplitudi vjerovatnosti zamijenio odgovarajućom sumom po relevantnim sedlastim tačkama. Usljed jonizacije atoma tuneliranjem kod HATI-ja i HHG-a

⁸Pogledati posljednje poglavlje, odjeljak 5.



Slika 2.9: Diferencijalni spektar zračenja kao funkcija emitovanih X-zraka (fotona) za atom He i Nd:YAG laser intenziteta 10^{15} W/cm^2 . Energije upadnih elektrona su za krive od vrha prema dnu date sa $E_{p_i} = 10, 20, 50, 100$ i 200 eV , respektivno. Vrijednosti na ordinati za donju krivu su predstavljene u atomskim jedinicama, dok su sve ostale krive pomaknute prema gore za tri reda veličine, svaka naredna u odnosu na prethodnu [76].

samo su kompleksna rješenja SPM aproksimacije moguća. U slučaju LAR-a imamo u početnom stanju slobodni elektron koji posjeduje pozitivnu energiju, pa u skladu s tim su i realna rješenja moguća. Analiza realnih rješenja može biti razmatrana unutar klasične fizike, pošto se u ovom slučaju može uspostaviti veza između zakona očuvanja energije i klasičnih jednačina kretanja.

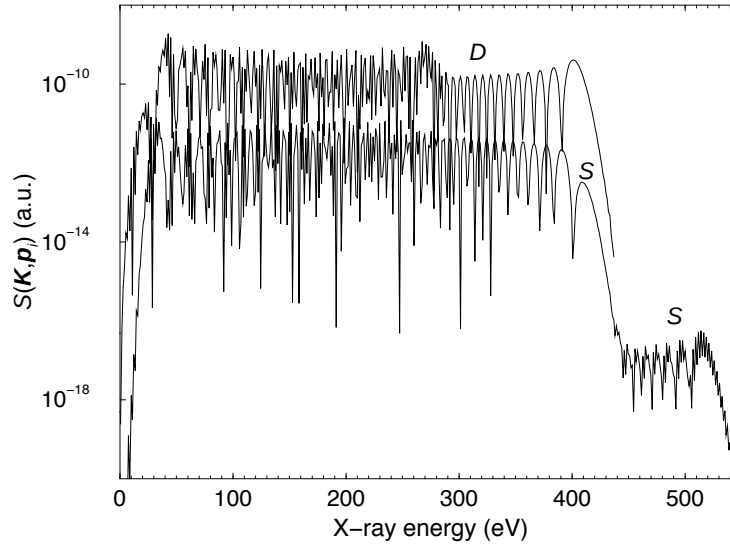
Odgovarajuća saddle-point jednačina za ovaj proces je ekvivalentna zakonu sačuvanja energije u trenutku rekombinacije t . Drugim riječima, klasična kinetička energija elektrona u laserskom polju u trenutku t mora biti jednaka energiji osnovnog stanja u koje elektron dolazi prilikom rekombinacije plus energija emitovanih X-zraka (fotona). Na osnovu ovog pristupa nađeno je da klasično dopušteni interval energija emitovanih X-zraka je određen sljedećom relacijom (u SI jedinicama)

$$\hbar\omega_{\mathbf{k}_{\max,\min}} = E_{\mathbf{p}_i} + 2U_P + |E_B| \pm 2\sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}U_P}, \quad (2.8)$$

gdje je $E_{\mathbf{p}_i}$ energija upadnog elektrona.

Rezultat je primjenljiv za visoke energije upadnog elektrona. Za niže energije, sa $E_{\mathbf{p}_i} < U_P$, minimalna energija je data sa $\hbar\omega_{\mathbf{k}_{\min}} = |E_B|$, uz pretpostavku da je brzina elektrona paralelna sa polarizacijom laserskog polja

[75]. Iz jednačine (2.8) vidimo da za veće vrijednosti energije upadnog elektrona energija emitovanih X-zraka postaje veća. Za bilo koju fiksnu vrijednost energije emitovanih X-zraka ispod te maksimalne energije postoje dva rješenja za određeno vrijeme rekombinacije t unutar jednog optičkog ciklusa. Njihova interferencija daje karakteristično ponašanje visokoenergetskog dijela spektra prikazanog na slici 2.9. Za niže vrijednosti energija emitovanih fotona, pored ova dva rješenja, dva dodatna rješenja egzistiraju za fiksno vrijeme rekombinacije unutar jednog perioda laserskog polja. Za niže vrijednosti E_{p_i} ova dodatna rješenja se javljaju za više vrijednosti energija emitovanog zračenja. Upravo interferencija ova četiri rješenja daje veoma komplikovanu strukturu spektra, kako se i vidi u niskoenergetskom dijelu spektra sa slike 2.9.



Slika 2.10: Diferencijalni spektar zračenja kao funkcija energije emitovanih X-zraka (fotona) za atom He i Nd:YAG laser intenziteta $1.5 \cdot 10^{15} \text{ W/cm}^2$ ($U_P = 157.3 \text{ eV}$). Energija upadnih elektrona je $E_{p_i} = 3\hbar\omega$. Gornja kriva, označena sa D , odnosi se na direktni LAR proces. Donja kriva, označena sa S , predstavlja podatke koji se dobiju ako se uzme u obzir samo SLAR proces. Za više energije X-zraka, direktni LAR proces iščezava, pa su rezultati predstavljeni donjom krivom u tom dijelu spektra egzaktni [76].

U istom radu data je teorija i odgovarajući numerički rezultati koji pored direktnog LAR-a uključuju i SLAR. Za veće vrijednosti energija upadnih elektrona doprinos LAR procesa dominira u spektru, dok se doprinos drugog procesa javlja u vidu slabe modifikacije spektra. S druge strane, numerički rezultati u slučaju nižih energija upadnih elektrona, pokazuju da odgovarajući doprinos SLAR procesa spektru postaje značajan (slika 2.10).

Na slici 2.10 je prikazan diferencijalni spektar zračenja $S(\mathbf{K}, \mathbf{p}_i)$ kao funkcija energije emitovanih X-zraka. Korišteni su podaci za Nd:YAG laser intenziteta $1.5 \cdot 10^{15} \text{ W/cm}^2$ ($U_P = 157.3 \text{ eV}$). Upadna energija elektrona je 3.51 eV . Gornja kriva (označena sa D) odgovara LAR procesu. U odgovarajućoj regiji vrijednosti $\hbar\omega_{\mathbf{K}}$, doprinos SLAR procesa diferencijalnom spektru zračenja (kriva označena sa S ispod krive označene sa D) je dva reda veličine niža, pa se odgovarajući doprinos diferencijalnom spektru može zanemariti. Za veće vrijednosti energija emitovanih X-zraka doprinos LAR procesa je nula, tako da samo doprinos od SLAR-a preostaje. Analognom analizom, kao i u prethodnom slučaju direktne rekombinacije, koristeći SPM aproksimaciju, može se doći do sljedećih zaključaka.

Maksimalna energija upadnog elektrona, dopuštena klasičnom teorijom, je ograničena, tj. vrijedi

$$E_{\mathbf{p}_i} \leq 10.007U_P. \quad (2.9)$$

Maksimalna energija detektovanog HATI elektrona u klasičnoj analizi je također $10.007U_P$. Pri toj analizi, kako ćemo vidjeti u sljedećem poglavlju, je pretpostavljeno da je jonizacioni potencijal atoma nula, te su realna rješenja moguća. U slučaju SLAR-a gornja granica za klasično dozvoljenu kinetičku energiju upadnog elektrona se može shvatiti na sljedeći način: ako je energija upadnog elektrona suviše velika, nakon rasijanja, lasersko polje neće biti u stanju vratiti elektron ka jezgri, te prema tome i proces rekombinacije neće biti moguć. Kvantno-mehanički je dopušteno da je $E_{\mathbf{p}_i} > 10.007U_P$. To je posljedica postojanja i kompleksnih rješenja postojećih SPM jednačina [75]. Poluklasičnom analizom tih rješenja, koja vode ka interferenciji unutar optičkog ciklusa, slično kao u prethodnom slučaju, može se objasniti kompleksna struktura diferencijalnog spektra prikazanog na slici 2.10. Na kraju navedimo i modificirani cutoff emitiranih X-zraka visokih energija, koji uključuje i odgovarajući cutoff za LAR proces, jednačina (2.8), kao i SLAR cutoff za niže energije upadnih elektrona

$$\hbar\omega_{\mathbf{k}_{\max}} = |E_B| + \max\{3.17U_P, E_{\mathbf{p}_i} + 2U_P + 2\sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}U_P}\}. \quad (2.10)$$

2.5 Rasijanje X-zraka na atomu u prisustvu laserskog polja

Istraživanje atomskih procesa koji se odvijaju pri istovremenom prisustvu jakog laserskog polja i mekih X-zraka trenutno privlače značajnu pažnju, kako putem teorijskih razmatranja, tako i eksperimentalnih poduhvata. Ovo je direktno povezano sa mogućnošću efikasne generacije viših harmonika upotre-

bljenog laserskog polja. Posljednji izvještaji [77, 78] pokazuju mogućnost generacije fotona energija oko 460 eV. Laserskim poljem inducirani fotoelektrični efekat uz korištenje mekih X-zraka nastalih putem generacije viših harmonika je opažen u radu [79]. Postoje, također, i drugačiji načini rada lasera koji proizvode meke X-zrake (pogledati rad [80] i reference unutar njega). Općenito je veoma mali broj teorijskih radova koji razmatraju fotojonizaciju atoma pomoću X-zraka (jedan od rijetkih je rad [81] koji se bavi fotojonizacijom atoma vodonika X-zracima uz prisustvo bihromatskog polja).

U ovom odjeljku ćemo se ukratko osvrnuti na proces rasijanja X-zraka na atomu u prisustvu laserskog polja (eng. X-ray-atom SCAttering, XSCA). Odgovarajuća analiza procesa bez prisustva laserskog polja se može naći u [82]. Diferencijalni presjek za slabo rasijanje je, unutar kvantno-mehaničke teorije rasijanja, izraženo Kramers-Heisenbergovom formulom, koja uključuje i elastično Rayleighovo i neelastično Ramanovo rasijanje. Numerički proračuni rasijanja X-zraka na atomu vodonika su izloženi u radu [83]. Rezultati brojnih istraživanja rasijanja X-zraka na vezanim sistemima bez prisustva laserskog polja se mogu naći u radovima [84, 85].

Vratimo se procesu koji se odvija uz prisustvo laserskog polja. Rezultati takvih istraživanja mogu se naći u radovima Ehlötzkyog [86, 87, 88] kao i Kálmána [89, 90, 91]. Posljednji rad je posvećen rasijanju X-zraka u prisustvu laserskog polja koje služi određivanju dužine trajanja ultrabrzih pulseva X-zraka i nije bitno vezan sa onim što ćemo dalje izlagati. U revijalnom članku [92] proces XSCA je razmatran u kontekstu elektron-atomskih sudara u laserskom polju. U radu [46] je predstavljena S -matrična teorija XSCA procesa. Nakon niza fizikalno opravdanih aproksimacija dobije se izraz za diferencijalni presjek rasijanja, u kojem se odgovarajući T -matrični element sastoji iz dva dijela, $T_{\mathbf{K}',\mathbf{K}}^{(-)}(N)$ i $T_{\mathbf{K},\mathbf{K}'}^{(+)}(N)$. Fizikalni procesi koji odgovaraju tim matričnim elementima se mogu objasniti pomoću Feynmanovih dijagrama. Prvi od njih odgovara procesu u kojem je prvo apsorbiran foton (X-zraka) valnog vektora $\mathbf{K}$ i energije $\hbar\omega_{\mathbf{K}}$. Atom se jonizuje i elektron se nastavlja kretati samo pod uticajem laserskog polja u intervalu vremena koji počinje u trenutku $t_1 - \tau$, a završava trenutkom t_1 kada se elektron vrati nazad do atomskog jezgra. Tada se odigrava proces rekombinacije elektrona pri kojem dolazi do izmjene N fotona sa laserskim poljem, te emisije fotona X-zraka valnog vektora $\mathbf{K}'$ i energije

$$\hbar\omega_{\mathbf{K}'} = \hbar\omega_{\mathbf{K}} + N\hbar\omega. \quad (2.11)$$

Matrični element $T_{\mathbf{K},\mathbf{K}'}^{(+)}(N)$ odgovara procesu u kojem je prvo emitovan foton (X-zraka) sa valnim vektorom $\mathbf{K}'$ i energijom $\hbar\omega_{\mathbf{K}'}$. Elektron se zatim kreće u laserskom polju, da bi naposljetku nastupila apsorpcija (emisija) N

fotona laserskog polja i apsorpcija jednog fotona (X-zraka) valnog vektora $\mathbf{K}$ i energije $\hbar\omega_{\mathbf{K}}$. Kada se odigrava rasijanje praćeno apsorpcijom N fotona, tada je $N > 0$. Za emisiju N laserskih fotona uzimamo da je $N < 0$.

Propagator međustanja između trenutka apsorpcije i trenutka emisije fotona X-zraka je “obučen” (eng. dressed) laserskim poljem, tako da, zbog sačuvanja parnosti u procesu rasijanja X-zraka na atomu u prisustvu laserskog polja, samo paran broj fotona laserskog polja može biti apsorbovan ili emitovan. Izraz za diferencijalni presjek rasijanja može biti dalje pojednostavljen primjenom posebne vrste vremenski zavisne WKB aproksimacije⁹. Polazna pretpostavka pri izvedbi pomenute aproksimacije je velik broj razmijenjenih fotona N . U radu je, pak, pokazano da aproksimacija vrijedi i u slučaju kada je nizak intenzitet laserskog polja i kada je mala vrijednost N . Kao rezultat ovog kvantno-mehaničkog pristupa, a kao posljedica simetrije i parnosti matričnih elemenata je i zaključak da glavni doprinos spektru dolazi od onih procesa u kojima je prvo apsorbovan foton X-zraka. Kako smo već naglasili, atom u ovom slučaju biva jonizovan i elektron se kreće kvazislobodno u laserskom polju. Ako je njegova energija dovoljno mala kada se vrati blizu atomske jezgre, on može biti ponovno “uhvaćen” i pri tome se emituje foton (X-zraka). Ovaj proces je najvjerojatniji kada broj razmijenjenih fotona zadovoljava sljedeću jednačinu

$$N\hbar\omega = I_P - \hbar\omega_{\mathbf{K}}, \quad (2.12)$$

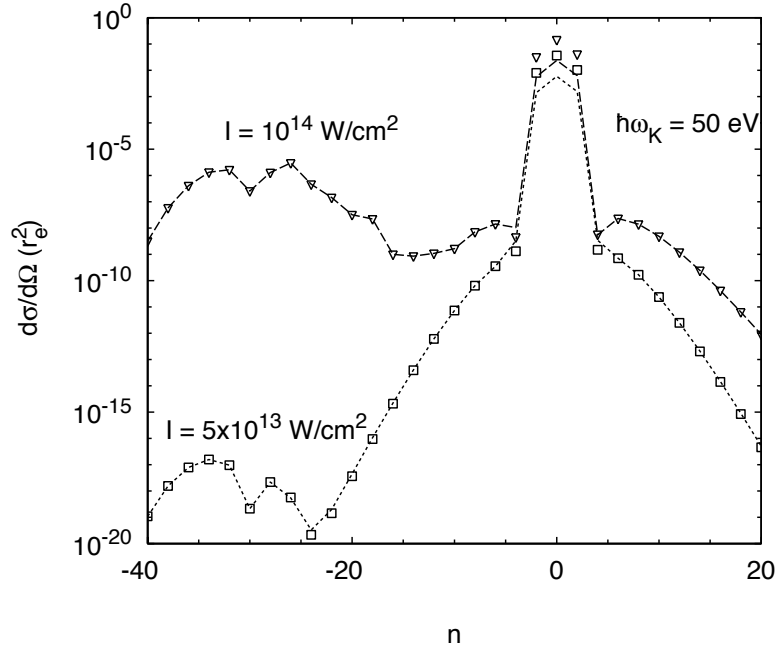
gdje je I_P jonizacioni potencijal atoma. Polje fotona X-zraka je karakterisano sa valnim vektorom $\mathbf{K}$ i frekvencijom $\omega_{\mathbf{K}}$ ¹⁰.

U slučaju da je ispunjen uslov $\hbar\omega_{\mathbf{K}} > I_P$ uglavnom je paran broj fotona emitovan u lasersko polje i energije rasijanih X-zraka, date sa (2.11), su manje nego energije upadnog X-zraka.

U istom radu je izložena i usporedba diferencijalnog presjeka rasijanja dobivenog kada se u odgovarajućem T matričnom elementu zadrži nulti, odnosno nulti i prvi član razvoja koji odgovara vremenski zavisnoj WKB aproksimaciji. Numerički rezultati za diferencijalni presjek rasijanja $d\sigma/d\Omega$

⁹Ovaj metod je razvijen u okviru aproksimacije jakog polja za slučajeve HHG-a [29] i HATI-ja [93]. Naime, integral po impulsu međustanja, koji se javlja u matričnom elementu, može biti riješen SPM metodom. Pri tom razvoju se dobije izraz koji predstavlja vremenski zavisnu Wentzel-Kramers-Brillouin aproksimaciju. Pokazalo se da u slučaju velike vrijednosti za vrijeme povratka elektrona ka matičnom jonu (slučajevi kada elektron ima visoku energiju pri naknadnom rasijanju) kod HATI-ja i HHG-a odbacujemo sve članove u razvoju koji sadrže član τ^{-m} ($m = 1, 2, \dots$). Ovaj član je povezan sa stopom širenja valnog paketa datog elektrona. Dakle, zadržavamo samo nulti član. Za više detalja pogledati poglavlje 4, odjeljak 2.

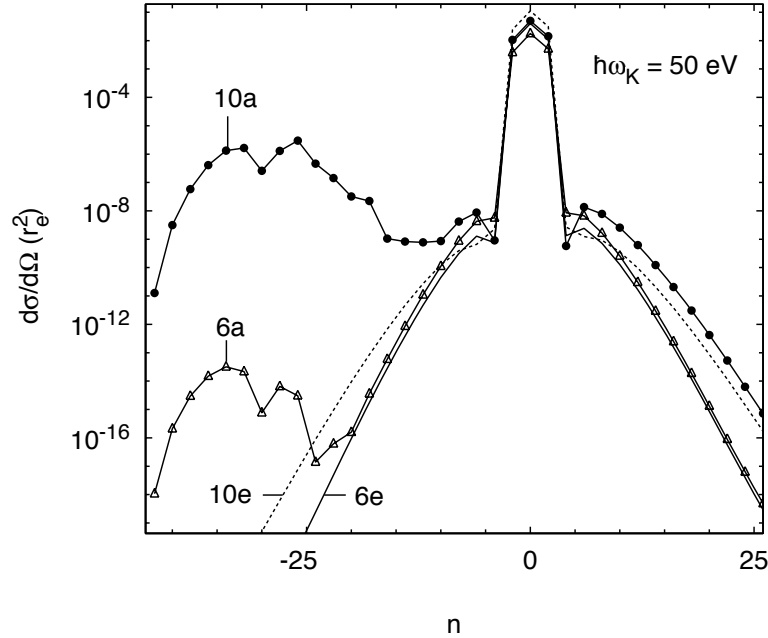
¹⁰Da bi razlikovali polje X-zraka od laserskog polja, prvo posmatramo kao kvantizirano, a drugo klasično, u skladu sa teorijom predstavljenom u radu [46].



Slika 2.11: Diferencijalni presjek rasijanja X-zraka u jedinicama r_0^2 ($r_0^2 = 2.82 \cdot 10^{-15}$ m je klasični radijus elektrona) kao funkcija broja N apsorbovanih (emitovanih) fotona laserskog polja, za dvije vrijednosti intenziteta laserskog polja: $I = 5 \cdot 10^{13}$ W/cm² (kvadratići i tačkasta kriva) i $I = 10^{14}$ W/cm² (trokutići i iscrtkana kriva). Lasersko polje je linearno polarizovano i monohromatsko sa energijom fotona $\hbar\omega = 1.17$ eV. Energija upadnih fotona (X-zraka) je $\hbar\omega_K = 50$ eV. Rezultati predstavljeni tačkastim i isprekidanim linijama su dobiveni korištenjem WKB aproksimacije nultog reda, dok trokutići i kvadrati odgovaraju rezultatima koji su dobiveni korištenjem aproksimacije prvog reda [46].

(u jedinicama kvadrata klasičnog elektronskog radijusa r_0^2) kao funkcije broja razmijenjenih fotona N sa laserskim poljem su predstavljeni na slici 2.11. Podaci su proračunati za dvije vrijednosti intenziteta laserskog polja. Trokutići i kvadratići se odnose na rezultate dobivene sa nultim i prvim članom, dok se krive označene tačkicama i iscrtkanim linijama odnose na WKB aproksimaciju kada je uključen samo nulti član. Kao što vidimo, za $|N| > 2$ aproksimacija nultog reda daje zadovoljavajuće rezultate. Šta više, rezultati predstavljeni na slici 2.11 pokazuju tipično ponašanje spektra X-zraka. Prije svega, samo paran broj fotona laserskog polja je apsorbovan ili emitovan. Dalje, za $N = 0, \pm 2$ spektar ima izražen maksimum poslije kojeg slijedi nagli pad pri $N = \pm 4$. Nakon toga, slijedi plato koji je posve različit za pozitivne i negativne vrijednosti N . Visina platoa je određena intenzitetom laserskog polja. Plato za pozitivne vrijednosti N je mali, skoro zanemarljiv, u odnosu

na plato sa negativnim vrijednostima N .



Slika 2.12: Diferencijalni presjek rasijanja X-zraka u prisustvu laserskog polja predstavljen na isti način kao na slici 2.11. Krive označene sa 6 i 10 se odnose na intenzitete $I = 6 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$ i $I = 10^{14} \text{ W/cm}^2$, respektivno. Rezultati koji su dobiveni korištenjem samo matričnog elementa koji opisuje proces u kojem je prvo apsorbovan foton (X-zraka) su označeni sa slovom “a”, dok su rezultati koji se odnose na proces u kojem je prvo emitovan foton (X-zraka) obilježeni sa slovom “e” [46].

Na slici 2.12 su analizirani doprinosi matričnih elemenata $T^{(+)}$ i $T^{(-)}$ diferencijalnom presjeku rasijanja. Rezultati označeni sa “a” odgovaraju matričnom elementu $T^{(-)}$ i odnose se na procese u kojima je prvo apsorbovan foton (X-zraka), dok su rezultati označeni sa “e” vezani za $T^{(+)}$ i odnose se na procese u kojima je prvo emitovan foton. Vidimo da je “e” spektar simetričan u odnosu na $N = 0$, dok “a” spektar ima široki plato za negativne vrijednosti N . Dakle, dominantni procesi koji doprinose spektru su oni u kojima je prvo apsorbovan foton (X-zraka), što je u saglasnosti sa gore navedenim razmatranjima. Na slikama 2.11 i 2.12 je za energiju upadnog fotona (X-zraka) uzeta vrijednost $\hbar\omega_K = 50 \text{ eV}$, a za energiju fotona laserskog polja vrijednost $\hbar\omega = 1.17 \text{ eV}$. Intenziteti laserskog polja su dati sljedećim vrijednostima: $I = 5 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$, $I = 6 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$ i $I = 10^{14} \text{ W/cm}^2$.

Dosadašnja razmatranja su se odnosila na proces rasijanja X-zraka na atomu u prisustvu linearno polarizovanog polja. U radu [94] su predstavljeni

rezultati za proces u bihromatskom laserskom polju, kao i koherentna fazna kontrola rasijanja X-zraka na atomu. Visokoenergetski plato koji je induciran prisustvom statičkog električnog polja u XSCA procesu je analiziran u radu [95]. Pokazano je da dodatno vanjsko statičko polje utiče na međustanja, što u konačnici vodi ka značajnom povećanju energija rasijanih X-zraka. U radu [96] Milošević i Starace su istraživali zavisnost plato strukture od intenziteta pri XSCA procesu i to za dva slučaja: sa i bez vanjskog statičkog polja.

Poglavlje 3

Jonizacija iznad praga

U ovom poglavlju ćemo se posvetiti opisu jonizacije iznad praga (ATI), odnosno jonizacije iznad praga višeg reda (HATI). U prvom odjeljku ćemo ukratko navesti eksperimentalne metode koje se koriste za dobivanje i analizu pomenutih procesa. U odjeljcima koji slijede iznijet ćemo različite teorijske pristupe opisu ATI-ja, odnosno HATI-ja. To uključuje, kako klasični, tako i kvantno-mehanički pristup.

3.1 Eksperimentalne metode

Jonizacija iznad praga je efekt opažen u opsegu intenziteta upotrebljenog laserskog zračenja od 10^{12} W/cm² do 10^{16} W/cm². Pri takvim vrijednostima intenziteta, atomi mogu biti jonizovani tako brzo da se gas totalno jonizuje prije nego puls dostigne svoju maksimalnu vrijednost. Ovo zahtjeva, s jedne strane, ili atome sa velikim jonizacionim potencijalom kao što su plemeniti gasovi, ili, s druge strane, ultrakratke laserske pulseve. Zahvaljujući veoma brzom razvoju tehnologije izvedbe femtosekundnih lasera, posebno nakon uvođenja u upotrebu titanium-sapphire (Ti:Sa) femtosekundnih lasera [97], proizvodnja lasera čija je snaga kompatibilna sa jačinom unutrašnjih polja atoma je postala uobičajena. Međutim, ključni trenutak koji je potaknuo detaljna istraživanja jonizacije iznad praga bio je upotreba femtosekundnih lasera sa veoma velikom stopom ponavljanja. To je omogućilo ispitivanje važnih kvalitativnih karakteristika ATI spektra. U zadnje vrijeme su dobiveni pulsevi trajanja reda veličine 5 fs [98], te sa stopom ponavljanja i do 100 kHz [99].

Najrašireniji eksperimentalni metod analize karakteristika ATI elektrona je time-of-flight spektroskopija. U trenutku kada laserski puls izbaci fotoelektron istovremeno se uključi sat visoke preciznosti. Elektroni prolijeću kroz

cijev (bez uticaja polja) poznate dužine ka detektoru elektrona. U trenutku detekcije elektrona zaustavi se sat. Kinetička energija elektrona se izračuna na osnovu njegovog vremena leta. Ovaj pristup je do sada bio metod sa najvišom energetsom rezolucijom. Osim toga, to je relativno jednostavan i pouzdan metod.

Drugi pristupi uključuju slikovnu spektroskopiju fotoelektrona [100] koja je u mogućnosti da zabilježi ugaonu raspodjelu ATI spektra. Treba, također, pomenuti i tzv. cold-target recoil-ion-momentum spektroskopiju (COLTRIMS). Eksperiment su izveli Dörner i saradnici 2000. godine [101]. Ovim metodom je moguće obezbijediti potpunu kinematičku determiniranost fragmenata fotojonizacije, tj. kinematičku determiniranost elektrona i jona. Međutim, u ovom slučaju se zahtjeva da se pri jednom laserskom pulsu ne jonizira više od jednog atoma. To daje posebne prednosti laserima sa velikom stopom ponavljanja pri izvođenju ovakvog eksperimenta. Nedostaci ove metode su slaba energetska rezolucija za elektrone, te veoma zahtjevna tehnologija.

3.2 Klasična analiza

U ovom odjeljku opisaćemo klasični model koji se često koristi za analizu jonizacije iznad praga. Prema tom modelu proces jonizacije se odvija u više koraka. U prvom koraku elektron izlazi u kontinuum u nekom trenutku t_0 . Ako je do jonizacije došlo tuneliranjem, odgovarajuća stopa vjerovatnosti je visoko nelinearna funkcija jačine upotrebljenog laserskog polja $E(t_0)$. Ključna ideja je da se najveći dio jonizacije dešava u djeliću optičkog ciklusa, tako da se električno polje može posmatrati kao kvazistatičko polje. U skladu s tim Ammosov, Delone i Krainov su dali teorijsku podlogu (ADK teorija), na osnovu koje je stopa tuneliranja, u atomskim jedinicama, data sljedećim izrazom [102]

$$\Gamma(t) = AI_P \left(\frac{4\sqrt{2I_P^3}}{|E(t)|} \right)^{2n^* - |m| - 1} \exp \left(-\frac{4\sqrt{2I_P^3}}{3|E(t)|} \right), \quad (3.1)$$

gdje je $|E(t)|$ trenutna vrijednost jačine električnog polja, $I_P > 0$ je jonizacioni potencijal atoma, $n^* = Z/\sqrt{2I_P}$ je efektivni glavni kvantni broj, Z je naboj jezgre i m je projekcija ugaonog momenta na osu koja se podudara sa polarizacijom laserskog polja. Konstanta A zavisi od stvarnih i efektivnih kvantnih brojeva. Izraz za stopu vjerovatnosti $\Gamma(t)$ je izveden pod pretpostavkom da je frekvencija lasera niska, potom da pobuđena stanja ne igraju bitnu ulogu, te da je Keldyshev parametar, $\gamma = [I_P/(2U_P)]^{1/2}$ mali

u poređenju sa jedinicom (U_P je ponderomotorni potencijal datog laserskog polja). Treba naglasiti da stopa vjerovatnosti jonizacije $\Gamma(t)$ ima oštar maksimum u trenutku kada jačina polja $E(t)$ dostigne svoj maksimum.

Klasični model razmatra orbite elektrona koji su oslobođeni, pod uticajem laserskog polja, u nekom trenutku t_0 . Doprinos takve staze će biti određen u skladu sa vrijednošću stope u tom trenutku. Posmatrano sa aspekta klasične fizike, elektron koji je oslobođen tuneliranjem će startati u polju sa brzinom nula pri tzv. “klasičnom izlazu iz tunela”, tj. pri $r \sim I_P/|E(t)|$, što za jaka polja predstavlja nekoliko atomskih jedinica udaljenosti od matičnog jona. Mi ćemo, uglavnom u ovom dijelu, pri razmatranju zanemarivati ovaj mali odklon od jona, tj. uzimaćemo da orbite elektrona polazište imaju pri $\mathbf{r}(t = t_0) = \mathbf{0}$ (pozicija jona) sa odgovarajućom brzinom $\dot{\mathbf{r}}(t = t_0) = \mathbf{0}$.

Ako je nakon procesa jonizacije interakcija elektrona sa matičnim jonom zanemariva, tada govorimo o direktnim elektronima i direktnoj jonizaciji iznad praga. U suprotnom, oslobođeni elektron se može vratiti ka jonu te se na njemu rasijati. U narednim pododjeljcima obratićemo pažnju na direktne elektrone, tj. one elektrone koji odmah nakon jonizacije bivaju detektovani.

3.2.1 Direktni elektroni

Drugi korak u klasičnom modelu je kretanje jonizovanog elektrona u jakom laserskom polju. Pri tome zanemarujemo uticaj potencijala matičnog jona na kretanje elektrona. Za laserska polja koja se upotrebljavaju kod ovakvih procesa intenzitet je velik, te je amplituda oscilacija elektrona u takvom polju mnogo veća nego dijametar atoma. U skladu s tim, zanemarenje uticaja potencijala jona je opravdano. Vektorski potencijal polja $\mathbf{A}(t)$ je tako izabran da njegovo usrednjavanje po jednom optičkom ciklusu $\langle \mathbf{A}(t) \rangle_T$ daje vrijednost nula. Polazimo od Newtonove jednačine za kretanje elektrona u električnom polju

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\mathbf{E}(t). \quad (3.2)$$

Integracijom jednačine (3.2) po vremenu u granicama od t_0 do t dobijemo brzinu elektrona

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(t_0) \equiv \mathbf{p} + \mathbf{A}(t). \quad (3.3)$$

Integraciju lijeve strane jednačine (3.2) smo izvršili uz pretpostavku da je $\dot{\mathbf{r}}(t = t_0) = \mathbf{0}$. Kako vidimo iz jednačine (3.3) brzina elektrona se sastoji od konstantnog člana $\mathbf{p} \equiv -\mathbf{A}(t_0)$ koji predstavlja driftni impuls elektrona koji

se registruje na detektoru, kao i od promjenljivog člana koji oscilira u fazi sa vektorskim potencijalom $\mathbf{A}(t)$.

Kinetička energija elektrona, usrednjena po jednom optičkom ciklusu T laserskog polja, je data sa

$$E = \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}(t)^2 \rangle_T = \frac{\mathbf{p}^2}{2} + \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}(t)^2 \rangle_T \equiv E_{\text{drift}} + U_P. \quad (3.4)$$

Drugi član u gornjoj jednačini

$$U_P = \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}(t)^2 \rangle_T, \quad (3.5)$$

predstavlja ponderomotornu energiju ili ponderomotorni potencijal. Radi se o usrednjenjnoj kinetičkoj energiji po optičkom ciklusu, oscilirajućeg (eng. wiggling) kretanja elektrona u laserskom polju. Ponderomotorna energija je pogodan parametar pri karakterizaciji intenziteta laserskog zračenja. Ako elektron ima početnu brzinu različitu od nule onda se u izrazu za brzinu umjesto $-\mathbf{A}(t_0)$ mora staviti $-\mathbf{A}(t_0) + \mathbf{v}_0$.

Pretpostavimo da imamo monohromatsko eliptički polarizovano polje

$$\mathbf{E}(t) = \frac{E_L}{\sqrt{1 + \xi^2}} (\hat{\mathbf{e}}_x \sin \omega t - \xi \hat{\mathbf{e}}_y \cos \omega t), \quad (3.6)$$

sa vektorskim potencijalom

$$\mathbf{A}(t) = \frac{A_L}{\sqrt{1 + \xi^2}} (\hat{\mathbf{e}}_x \cos \omega t + \xi \hat{\mathbf{e}}_y \sin \omega t). \quad (3.7)$$

Parametar $\xi \in [-1, 1]$ karakteriše elipticitet. U slučaju da je $\xi = 1$ imamo kružno, odnosno u slučaju da je $\xi = 0$ imamo linearno polarizovano polje. Na osnovu (3.5) ponderomotorna energija je data sa

$$U_P = \frac{A_L^2}{4}. \quad (3.8)$$

Driftna energija elektrona u laserskom polju definisana sa (3.4) je data sa

$$E_{\text{drift}} = \frac{A(t_0)^2}{2}, \quad (3.9)$$

i ograničena je u intervalu

$$\frac{2\xi^2}{1 + \xi^2} U_P \leq E_{\text{drift}} \leq \frac{2}{1 + \xi^2} U_P. \quad (3.10)$$

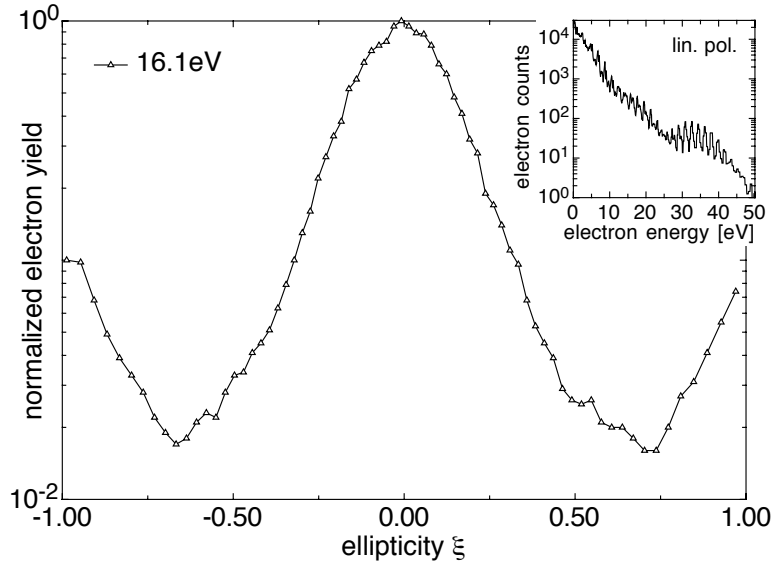
U slučaju linearne polarizacije, driftna energija može poprimiti bilo koju vrijednost od 0 do $2U_P$, a za cirkularnu od 0 do U_P . Kvantno-mehanički pristup značajno “smekšava” ove klasične granice. Ipak, klasična analiza daje granice koje mogu poslužiti kao dobri markeri pri analizi eksperimentalnim putem dobivenih spektara [103]. To se posebno odnosi na spektre dobivene upotrebom lasera izuzetno visokog intenziteta [104].

Kako smo kazali na početku ovog poglavlja vjerovatnost jonizacije zavisi od jačine električnog polja u trenutku jonizacije. S druge strane, driftni impuls $\mathbf{p} = -\mathbf{A}(t_0)$ je direktno proporcionalan vektorskom potencijalu, također u trenutku t_0 . To znači da je vjerovatnost da elektron poslije jonizacije poprimi određenu vrijednost driftnog impulsa određena vrijednošću stope vjerovatnosti u trenutku t_0 . Elektron će sa najvećom vjerovatnošću biti jonizovan kada je apsolutna vrijednost električnog polja blizu svoje maksimalne vrijednosti. Dakle, za linearno polarizovano polje vrijednost vektorskog potencijala, odnosno driftnog impulsa je u tom trenutku blizu nule. Da bi se dostigla maksimalna driftna energija od $2U_P$, elektron mora biti jonizovan u trenutku kada je vrijednost jačine električnog polja oko nule, tj. kada je stopa jonizacije veoma mala. Ponekad ova tijesna veza trenutne stope jonizacije i driftnog impulsa dovodi do veoma interesantnih efekata. To posebno važi za polja gdje je veza između pomenutih veličina složenija nego kod linearno polarizovanog monohromatskog polja, npr. u slučaju bihromatskog polja [105]. Također, spomenimo primjer “dodging” fenomena koji se, usljed gore navedene veze, javlja kod direktnih elektrona pri upotrebi eliptički polarizovanog laserskog polja (slika 3.1) [106].

Pri ovom razmatranju smo pretpostavili da je puls dovoljno kratak, tako da elektron ne trpi transverzalni prostorni gradijent fokusiranog pulsa. U ovom slučaju se može zanemariti prostorna zavisnost vektorskog potencijala $\mathbf{A}(t)$. Otuda slijedi da je i driftni impuls $\mathbf{p}$, odnosno odgovarajući impuls zabilježen na detektoru izvan polja sačuvana veličina [107]. Ponderomotorna energija U_P je izgubljena sa stanovišta detektovanog elektrona, tj. taj iznos energije se vraća polju, kada je elektron “ostavljen” iza vrha pulsa [108]. U suprotnom, kada elektron napusti puls okomito na smjer njegovog prostiranja, ponderomotorna energija se konvertuje u energiju drifta, tako da energija koju registruje detektor iznosi $E_{\text{drift}} + U_P$. Efekti koji potiču od prostorne zavisnosti ponderomotornog potencijala U_P su opaženi u eksperimentima navedenim u referenci [109].

3.2.2 Visokoenergetski elektroni

U prethodnom odjeljku razmatrali smo direktne elektrone, tj. one elektrone koji nakon procesa jonizacije iznad praga (prvi korak), napuštaju fokus laser-



Slika 3.1: Prinos fotoelektrona energije 16.1 eV kao funkcija elipticiteta ξ , eliptički polarizovanog polja datog sa (3.6). Samo oni elektroni, emitovani u pravcu paralelnom sa većom osom polarizacije polja su detektovani. ATI spektar, koji odgovara linearno polarizovanom polju ($\xi = 0$), je prikazan u gornjem, desnom dijelu slike. Intenzitet lasera je $I = 0.8 \cdot 10^{14} \text{ W/cm}^2$, a talasna dužina $\lambda = 630 \text{ nm}$. Slika pokazuje “dodging” efekat. Jonizacija se odigrava, uglavnom, kada električno polje dostigne svoju maksimalnu vrijednost. Pošto se radi o eliptički polarizovanom polju, tada je električno polje usmjereno u pravcu veće, a vektorski potencijal u pravcu manje ose polarizacije polja. Dakle, driftni impuls $\mathbf{p} = -\mathbf{A}(t_0)$ je usmjeren u pravcu male ose polarizacije. On ima veću vrijednost, što je veća vrijednost elipticiteta ξ . S druge strane, emisija fotoelektrona u pravcu veće ose, jasno, opada sa porastom elipticiteta. Elektron, dakle, “izbjegava” jaču komponentu polja. Efekat iščezava kada elipticitet dostiže vrijednost koja odgovara kružnoj polarizaciji [106].

skog polja, te bivaju detektovani, bez mogućnosti ikakve dodatne interakcije sa matičnim jonom. Sad ćemo razmotriti i tu mogućnost.

Integriranjem jednačine (3.3), koja predstavlja izraz za brzinu elektrona, dobijemo odgovarajući izraz za trajektoriju elektrona

$$\mathbf{r}(t) = \int_{t_0}^t d\tau \mathbf{A}(\tau) - (t - t_0) \mathbf{A}(t_0). \quad (3.11)$$

Prilikom integracije gornje jednačine pretpostavili smo da je $\mathbf{r}(t = t_0) = \mathbf{0}$. Uslov da se elektron vrati ka matičnom jonu u određenom trenutku $t = t_1 > t_0$ je

$$\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{0}. \quad (3.12)$$

Za linearnu polarizaciju u x pravcu gore navedeni uslov daje $x(t_1) = 0$ i $y(t) \equiv z(t) \equiv 0$. To nam omogućava da t_1 izrazimo kao funkciju od t_0 .

Kada se elektron vrati ka matičnom jonu može doći do elastičnog rasijanja [31]. Pri tom procesu elektron može primiti dodatnu driftnu energiju, mnogo veću nego su je imali elektroni koji su odmah nakon jonizacije bili detektovani. Ovaj proces se naziva jonizacija iznad praga višeg reda (eng. High-order Above-Threshold Ionization, HATI). Radi jednostavnosti, ograničimo se na slučaj linearno polarizovanog polja, npr. u pravcu x ose. U prethodnom poglavlju, kada smo naveli zakon odsijecanja za proces HHG-a (pogledati (2.3)), naveli smo da je maksimalna kinetička energija elektrona pri povratku $3.17U_P$. Naime, na osnovu jednačine (3.3) imamo da je kinetička energija elektrona u trenutku povratka data sa

$$E_{\text{ret}} = \frac{1}{2}[A(t_1) - A(t_0)]^2. \quad (3.13)$$

Tražeci maksimum energije povratka po varijabli t_0 , uz uslov $x(t_1) = 0$, dobijemo da je $E_{\text{ret,max}} = 3.17U_P$ za $\omega t_0 = 108^\circ$ i $\omega t_1 = 342^\circ$ [31]. Lako je pokazati da poslije naknadnog rasijanja elektron može poprimiti dodatnu energiju i to mnogo veću nego je prethodno navedena vrijednost. Na elastični sudar elektrona i jona primjenjujemo zakon održanja energije

$$\frac{\mathbf{v}(t_1 + 0)^2}{2} = \frac{\mathbf{v}(t_1 - 0)^2}{2}, \quad (3.14)$$

gdje je $\mathbf{v}(t_1 + 0)$ brzina elektrona neposredno poslije rasijanja, a $\mathbf{v}(t_1 - 0)$ brzina elektrona neposredno prije rasijanja. Analogno kao pri izvođenju relacije (3.3), može se jednostavno dobiti izraz za brzinu elektrona u nekom momentu $t > t_1$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_1 + 0) + \mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(t_1). \quad (3.15)$$

Pretpostavimo da se elektron rasijao na matičnom jonu pod uglom 180° u odnosu na osu koja se poklapa sa osom polarizacije laserskog polja. Primjenom zakona održanja impulsa dobivamo

$$\mathbf{v}(t_1 + 0) = -\mathbf{v}(t_1 - 0). \quad (3.16)$$

S obzirom da se radi o kretanju po pravcu, umjesto vektora možemo operirati sa skalarnim veličinama, gdje predznak minus predstavlja suprotan smjer pozitivnom smjeru x ose. Ponovno koristeći relaciju (3.3) možemo dobiti da je

$$v_x(t_1 - 0) = A(t_1) - A(t_0). \quad (3.17)$$

Tada relacija (3.16) postaje

$$v_x(t_1 + 0) = A(t_0) - A(t_1), \quad (3.18)$$

tako da je na osnovu (3.15) brzina elektrona u nekom trenutku $t > t_1$ data relacijom

$$v_x(t) = A(t_0) - 2A(t_1) + A(t). \quad (3.19)$$

Kinetička energija elektrona nakon naknadnog rasijanja se dobiva usrednjavanjem po periodu laserskog polja, u skladu sa izrazom (3.4). Izostavljajući ponderomotorni potencijal dat sa (3.5), a koji potiče od kvadrata posljednjeg člana u (3.19), konačno možemo zabilježiti da je traženi izraz

$$E_{bs} = \frac{1}{2}[2A(t_1) - A(t_0)]^2. \quad (3.20)$$

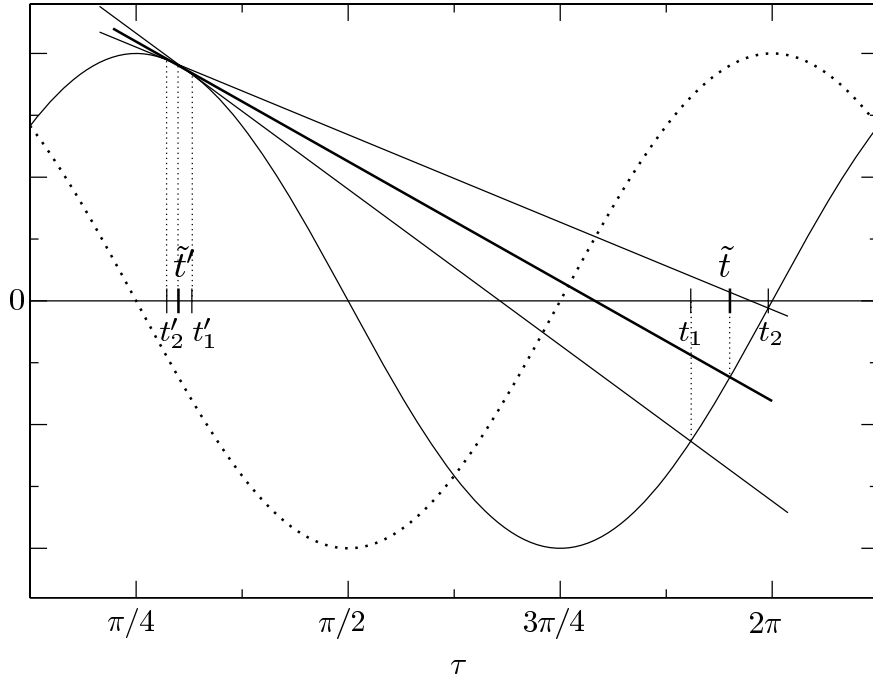
Tražeci maksimum funkcije $E_{bs}(t_0, t_1)$, uz uslov $x(t_1) = 0$, dobijemo da je maksimalna kinetička energija detektovanog elektrona, nakon procesa naknadnog rasijanja data sa [110]

$$E_{bs,max} = 10.007U_P, \quad (3.21)$$

za $\omega t_0 = 105^\circ$ i $\omega t_1 = 352^\circ$. Možemo primijetiti da su ove vrijednosti veoma bliske onim koje odgovaraju maksimalnoj energiji povratka $E_{ret,max}$.

Važno je još jednom naglasiti da je uslov da elektron postigne maksimalnu energiju povratka $E_{ret,max} = 3.17U_P$, odnosno da bude detektovan sa maksimalnom energijom nakon procesa naknadnog rasijanja $E_{bs,max} = 10.007U_P$, taj da bude oslobođen jonizacijom iznad praga neposredno nakon što električno polje dostigne svoju maksimalnu vrijednost. S druge strane, to znači da se u tom slučaju proces povratka, odnosno rasijanja, odigrava u trenutku kada je jačina električnog polja blizu svoje nulte vrijednosti (pogledati sliku 3.2). Ovo, također, obezbjeđuje intuitivno objašnjenje u pogledu dodatne energije koju elektron dobije prilikom procesa rasijanja: ako se elektron vrati ka matičnom jonu u trenutku kada je jačina upotrebljenog laserskog polja bliska nuli i onda se rasije za 180° , tada će elektron biti ubrzavan u drugoj polovini perioda laserskog polja.

Općenito, jednačina $x(t_1) = 0$ za fiksnu vrijednost t_0 može imati proizvoljno mnogo rješenja. To postaje jasno sa grafičkog prikaza rješenja na slici 3.2. Ako oslobođeni elektron započinje kretanje u kontinuumu u trenutku t_0 , neposredno nakon što polje dostigne maksimalnu vrijednost, taj se elektron može vratiti jonu mnogo puta. Ova rješenja koja imaju duga vremena putovanja (eng. travel times) $t_1 - t_0$ su veoma važna za pojačanje dijelova

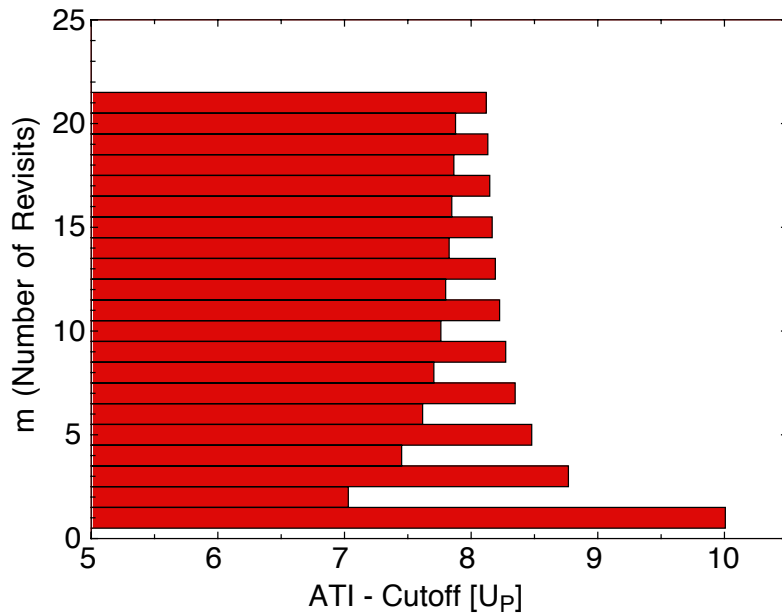


Slika 3.2: Grafički prikaz rješenja jednačine $x(t_1) = 0$ po vremenu povratka t_1 za datu vrijednost trenutka jonizacije t_0 . Uslov povratka elektrona matičnom jonu može biti napisan u sljedećoj formi: $F(t_1) = F(t_0) + (t_1 - t_0)F'(t_0)$, gdje je funkcija $F(\tau) = \int d\tau A(\tau) \sim \sin \omega\tau$ (puna kriva) integral vektorskog potencijala $A(\tau) \sim \cos \omega\tau$ (tačkasta kriva). Debela puna prava linija, koja predstavlja tangentu na krivu $F(\tau)$ u tački $\tau = t_0$, presjeca pomenutu krivu prvi put u tački $\tau = t_1$. Trenutak jonizacije t_0 je tako izabran, da kinetička energija povratka E_{ret} , data sa (3.13), ima maksimalnu vrijednost, tj. $E_{\text{ret,max}} = 3.17 U_P$. Dvije susjedne prave linije su povezane sa istom vrijednošću kinetičke energije $E_{\text{ret}} < E_{\text{ret,max}}$. Sa slike vidimo da ona susjedna linija, koja odgovara ranijem trenutku jonizacije, ima kasnije vrijeme povratka, u odnosu na liniju povezanu sa kasnijim trenutkom jonizacije. Obično, može biti više presjecanja s povećanjem vrijednosti trenutka t_1 , ako je t_0 blizu one vrijednosti, koja je povezana sa ekstremom funkcije $F(\tau)$. Ona odgovaraju orbitama sa dužim vremenom putovanja [114].

spektra pri tačno određenom intenzitetu laserskog polja. Objašnjenje ove pojave, uključujući i nove rezultate do kojih smo došli, iznijet ćemo u šestom poglavlju ovoga rada.

Već smo zabilježili da je maksimalna energija detektovanog elektrona, a nakon procesa naknadnog rasijanja na matičnom jonu, $E_{\text{bs,max}} = 10.007 U_P$ vezana za odgovarajuće vrijeme t_0 . Ako bi nas interesovala neka fiksna vrijednost energije manja od maksimalne moguće, tj. $E_{\text{bs}} < E_{\text{bs,max}}$, tada bi postojala dva trenutka u kojima bi elektron započinjao kretanje u kontinuumu, a koja vode ka naznačenoj vrijednosti energije E_{bs} : jedan prije $t_{0,\text{max}}$, a

drugi poslije. Sa grafičkog prikaza rješenja na slici 3.2 vidimo da je za raniji trenutak vezano duže vrijeme putovanja nego li je to slučaj za trenutak nakon $t_{0,\max}$. Maksimalna kinetička energija elektrona kao funkcija vremena putovanja elektrona ($t_1 - t_0$), odnosno kao funkcija broja povrata ka matičnom jonu prije samog procesa rasijanja je prikazana na slici 3.3. Jasno se vidi da elektroni sa najkraćim orbitama, tj. oni elektroni koji se već pri prvom povratku ka jonu na njemu elastično rasiju, mogu postići najveću driftnu energiju.



Slika 3.3: Maksimalna driftna energija, detektovana poslije naknadnog rasijanja (ATI cutoff), kao funkcija m -tog povratka u blizinu matičnog jona. Elektroni sa najkraćim orbitama ($m = 1$) mogu postići najveću moguću energiju. S druge strane, oni elektroni koji jedanput zaobiđu matični jon, prije naknadnog rasijanja koje se odigra pri drugom povratku ($m = 2$), postižu znatno nižu energiju u odnosu na prethodno pomenute elektrone. Svaki povratak odgovara dvjema kvantnim orbitama: m -ti povratak odgovara kvantnoj orbiti $2m + 1$, odnosno $2m + 2$ [118].

Ako bi razmatrali proces naknadnog rasijanja u proizvoljan ugao θ u odnosu na pravac ose koja se podudara sa osom polarizacije polja, možemo očekivati nižu vrijednost maksimalne energije detektovanog elektrona, pošto će se dio maksimalne energije povratka $E_{\text{ret,max}} = 3.17U_P$ elektrona utrošiti na transversalno kretanje. To, opet, znači da za fiksnu energiju E_{bs} postoji ograničenje u ugaonoj raspodjeli, tj. za datu energiju biće registrovani elektroni samo za tačno određene vrijednosti uglova $0 \leq \theta \leq \theta_{\max}(E_{\text{bs}})$. Ovaj efekat je poznatiji kao “rainbow efekat” [111]. Odgovarajuća kinematika je

sadržana u sljedećim relacijama [110]

$$E_{\text{bs}} = \frac{1}{2}[A(t_0)^2 + 2A(t_1)[A(t_1) - A(t_0)](1 \pm \cos \theta)], \quad (3.22)$$

$$\cot \theta = \cot \theta_0 - \frac{A(t_1)}{\sin \theta_0 |A(t_0) - A(t_1)|}. \quad (3.23)$$

U ovim relacijama ugao θ_0 označava ugao rasijanja u trenutku kada elektron vrši naknadno rasijanje. Ovaj ugao može imati vrijednosti između 0 i π , za razliku od opaženog ugla θ na detektoru izvan polja, koji može poprimiti samo određene vrijednosti za fiksnu energiju E_{bs} . U gornjoj jednačini znak plus (minus) vrijedi za slučaj $A(t_0) > A(t_1)$ ($A(t_0) < A(t_1)$).

Naglašena ograničenja u ugaonoj distribuciji u odnosu na pravac polarizacije laserskog polja su prvi put opažena u eksperimentu [112]. Visokoenergetski plato u spektru elektrona, oslobođenih jonizacijom iznad praga, sa maksimalnom energijom (energijom odsijecanja) oko $10.007U_P$, je predstavljen u radu [113].

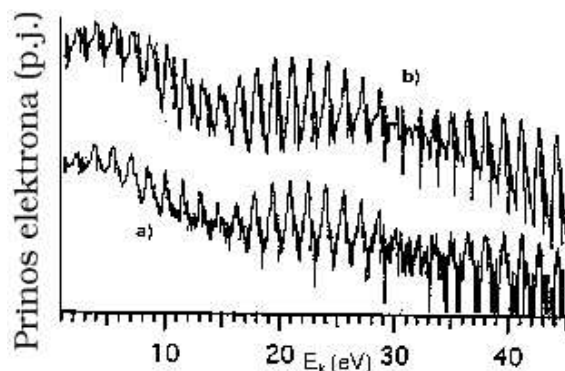
Općenito, klasične karakteristike HATI spektra posebno dolaze do izražaja pri velikim intenzitetima laserskog polja. Dakle, karakteristike HATI procesa su posebno izražene u tunel režimu jonizacije. Ovo je, također, potvrđeno i usporedbom sa rezultatima numeričke integracije Schrödingerove jednačine [114], te eksperimentalno za atom He pri intenzitetima oko 10^{15} W/cm². Posljednji eksperimenti pokazuju također široki visokoenergetski plato u energetskom intervalu od oko $2U_P$ do $10U_P$ (npr. pogledati [115]). Za relativno niske intenzitete, ugaona raspodjela je zabilježena u slučaju ksenona i to sa veoma visokom preciznošću [116]. U njima su primjetni gore pomenuti efekti sa naglašenijom strukturom koja je opet posljedica kvantno-mehaničke interferencije i multifotonske rezonance sa pomjerenim Rydbergovim stanjima za vrijednost ponderomotorne energije [117].

3.3 Kvantno-mehanička analiza

Najčešći pristup teorijskom kvantno-mehaničkom opisu ATI procesa jeste single-active-electron aproksimacija – SAE (jedan aktivni elektron) aproksimacija. SAE aproksimacija predstavlja atom u laserskom polju kao jedan elektron vezan optimiziranim potencijalom u interakciji sa poljem. Sve do sada, pri jednostrukoj jonizaciji, nisu primijećeni efekti koji ukazuju na elektron-elektronsku korelaciju.

Opravdanost ove aproksimacije je potvrđena poređenjem eksperimentalnog ATI spektra argona i numeričkog rješenja trodimenzionalne vremenski

zavisne Schrödingerove jednačine (eng. time-dependent Schrödinger equation – TDSE) (pogledati revijalni rad [118] i reference unutar njega). Numerički dobiveni spektar se izvršno slaže sa onim eksperimentalno dobivenim (vidjeti sliku 3.4).



Slika 3.4: Poređenje eksperimentalnog spektra (a) i spektra dobivenog rješavanjem trodimenzionalne vremenski zavisne Schrödingerove jednačine (b) uz SAE aproksimaciju. Spektar je za argon, a valna dužina lasera je 800 nm. Vrijednost maksimalne, klasično dopuštene, kinetičke energije fotoelektrona $10 U_P$ na slici odgovara vrijednosti od 39 eV. Spektri su vertikalno pomaknuti jedan u odnosu na drugi radi jasnijeg poređenja [118].

Numeričko rješavanje trodimenzionalne TDSE je veliki izazov, jer, tokom propagacije u laserskom polju, brzina elektrona može dobiti velike vrijednosti. Ovakav elektronski valni paket može preći velike razdaljine u malom vremenskom intervalu. To znači da prostorna rešetka koja se koristi u metodi numeričke integracije mora biti velika, sa malim razmacima između uzastopnih tačaka, kako bi se moglo pratiti kretanje valnog paketa. Osim toga, da bi se dobio precizan rezultat, potrebno je zadati male vremenske korake, što postavlja ograničenje na dužinu konačnog vremenskog intervala. Pristup koji je skoro komplementaran rješavanju TDSE polazi od analitičkog rješenja za kretanje slobodnog elektrona u homogenom laserskom polju – tzv. Volkovljevo rješenje¹, a potencijal veze sa atomom se uzima kao perturbacija. Što je veći intenzitet laserskog polja, niža frekvencija i duži puls, to je zahtjevnije rješavanje TDSE. Tu prednost ima pristup rješavanja preko Volkovljevih funkcija, koji, iako predstavlja znatno pojednostavljenje, daje rješenja koja se jako dobro slažu sa rješenjima dobivenim pomoću TDSE. Iako se u ovom pristupu zanemaruje interakcija elektrona sa ostatkom matičnog atoma – jonom, pri poređenju rezultata za energetski spektar fotoelektrona sa rezultatima

¹Pogledati četvrti odjeljak prvog poglavlja.

koji se dobivaju tako što se u proračunima umjesto Volkovljevog rješenja koristi Coulomb-Volkovljevo rješenje, očito je dobro kvalitativno slaganje, naročito za više energije [93, 119]. Coulomb-Volkovljevo rješenje se dobiva kao aproksimativno rješenje Schrödingerove jednačine za kretanje elektrona u elektromagnetnom polju uz prisustvo Coulombovog potencijala.

U narednim odjeljcima osnova za kvantno-mehanički opis ATI procesa će upravo biti Volkovljevo rješenje. Rezultate dobivene na osnovu pristupa koji uzima u obzir Coulomb-Volkovljevo rješenje ćemo iznijeti u petom odjeljku.

3.3.1 Kvantno-mehanički opis direktnih elektrona

U ovom odjeljku želimo predstaviti analitički pristup jonizaciji pomoću jakog laserskog polja koji potiče još od šezdesetih godina prošlog vijeka [120, 121, 122]. Cilj je bio naći pogodnu aproksimaciju za amplitudu vjerovatnosti za ATI elektrone detektovane sa određenim driftnim impulsom $\mathbf{p}$. Pretpostavlja se da su elektroni oslobođeni putem interakcije laserskog zračenja i atoma koji se prije dolaska laserskog pulsa nalazio u svom osnovnom stanju $|\psi_0\rangle$. Amplituda vjerovatnosti u tom slučaju glasi

$$M_{\mathbf{p}} = \lim_{t \rightarrow \infty, t' \rightarrow -\infty} \langle \psi_{\mathbf{p}}(t) | U(t, t') | \psi_0(t') \rangle. \quad (3.24)$$

$U(t, t')$ je vremenski operator evolucije koji odgovara hamiltonijanu

$$H(t) = -\frac{1}{2}\nabla^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t) + V(\mathbf{r}), \quad (3.25)$$

gdje je atomski potencijal veze $V(\mathbf{r})$, a $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t)$ predstavlja interakciju elektrona sa laserskim poljem. Uvedimo hamiltonijan koji odgovara atomu bez uticaja vanjskog polja H_a i hamiltonijan koji odgovara slobodnom elektronu u laserskom polju koji ne osjeća uticaj matičnog jona H_f na sljedeći način

$$H_a \equiv H_{\text{atom}} = -\frac{1}{2}\nabla^2 + V(\mathbf{r}), \quad (3.26)$$

$$H_f(t) \equiv H_{\text{field}}(t) = -\frac{1}{2}\nabla^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t). \quad (3.27)$$

Odgovarajuće operatore vremenske evolucije označićemo sa U_a i U_f , respektivno. U jednačini (3.24) $|\psi_{\mathbf{p}}\rangle$ i $|\psi_0\rangle$ su stanje rasijanog elektrona sa asimptotskim impulsom $\mathbf{p}$ i osnovno stanje hamiltonijana H_a , respektivno. Vlastita stanja vremenski zavisne Schrödingerove jednačine sa hamiltonijanom $H_f(t)$ su poznata kao Volkovljeva stanja i ona čine potpun skup. U length gauge ova stanja imaju sljedeći oblik (vidjeti odjeljak 1.4)

$$|\psi_{\mathbf{p}}^{(\text{Vv})}(t)\rangle = |\mathbf{p} + \mathbf{A}(t)\rangle \exp(-iS_{\mathbf{p}}(t)), \quad (3.28)$$

gdje je $|\mathbf{p} + \mathbf{A}(t)\rangle$ stanje ravnog talasa definisano kao

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{p} + \mathbf{A}(t) \rangle = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \exp(i[(\mathbf{p} + \mathbf{A}(t)) \cdot \mathbf{r}]), \quad (3.29)$$

a $S_{\mathbf{p}}(t)$ je akcija data sa

$$S_{\mathbf{p}}(t) = \frac{1}{2} \int^t d\tau [\mathbf{p} + \mathbf{A}(\tau)]^2. \quad (3.30)$$

Donja granica integrala nema značaja. Ona uvodi fazu koja ne daje doprinos bilo kojoj opservabli. Vremenski operator evolucije $U(t, t')$ zadovoljava Dysonove integralne jednačine, koje su pogodne želimo li izvršiti odgovarajući perturbativni razvoj, ili po interakciji sa laserskim poljem $H_I(t) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t)$

$$U(t, t') = U_a(t, t') - i \int_{t'}^t d\tau U(t, \tau) H_I U_a(\tau, t'), \quad (3.31)$$

ili po atomskom potencijalu $V(\mathbf{r})$

$$U(t, t') = U_f(t, t') - i \int_{t'}^t d\tau U_f(t, \tau) V U(\tau, t'). \quad (3.32)$$

Jednačina (3.31) vrijedi i u slučaju izmjene pozicija U i U_a u drugom članu desne strane te jednačine. Isto vrijedi i za jednačinu (3.32). Uz pomoć integralne jednačine (3.31), te koristeći ortogonalnost vlastitih stanja hamiltonijana H_a , izraz (3.24) možemo pisati u sljedećoj formi

$$M_{\mathbf{p}} = -i \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t d\tau \langle \psi_{\mathbf{p}}(t) | U(t, \tau) H_I(\tau) | \psi_0(\tau) \rangle. \quad (3.33)$$

Relacija (3.33) je još uvijek egzaktni izraz. Ključno pojednostavljenje predstavlja uvođenje aproksimacije jakog polja (eng. Strong-Field Approximation, SFA). Ova aproksimacija se očitava u sljedećim izmjenama unutar amplitude vjerovatnosti

$$|\psi_{\mathbf{p}}\rangle \rightarrow |\psi_{\mathbf{p}}^{(\text{Vv})}\rangle, \quad (3.34)$$

odnosno

$$U \rightarrow U_f, \quad (3.35)$$

što rezultira sa

$$M_{\mathbf{p}} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \langle \psi_{\mathbf{p}}^{(\text{Vv})}(t_0) | H_I(t_0) | \psi_0(t_0) \rangle. \quad (3.36)$$

Fizikalna pozadina ove aproksimacije je da, nakon što je elektron oslobođen u kontinuumu u trenutku t_0 usljed interakcije sa laserskim poljem, opisane sa $H_I(t_0) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t_0)$, on više ne osjeća atomski potencijal. Ovaj iskaz upravo zadovoljava prethodno definisane elektrone kao direktne. Amplitude ovog tipa se nazivaju Keldysh-Faisal-Reiss (KFR) amplitude [120, 121, 122, 123, 124].

U amplitudi (3.36) interakciju možemo pisati na sljedeći način

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t_0) = H_f(t_0) - H_a + V(\mathbf{r}) = -i \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial t_0} - i \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial t_0} + V(\mathbf{r}). \quad (3.37)$$

Parcijalnom integracijom amplituda (3.36) može biti napisana u sljedećem obliku

$$M_{\mathbf{p}} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \langle \psi_{\mathbf{p}}^{(\text{Vv})}(t_0) | V(\mathbf{r}) | \psi_0(t_0) \rangle. \quad (3.38)$$

Ovaj oblik je naročito pogodan za kratkodosežni ili potencijal nultog dometa (eng. zero-range potential), pošto pojednostavljuje prostornu integraciju u matričnom elementu.

Amplituda (3.36), odnosno (3.38), se može razviti u red po Besselovim funkcijama što nećemo ovdje raditi. Za dovoljno visoke intenzitete (mali Keldyshev parametar γ) može se koristiti metod sedlaste tačke [125]. Ovaj metod se sastoji u razvoju faze podintegralne funkcije u matričnom elementu oko tačaka gdje je faza stacionarna. Dijelovi Volkovljeve valne funkcije (3.28) i vremenski zavisna valna funkcija osnovnog stanja u atomu $|\psi_0(t)\rangle = \exp(iI_P t) |\psi_0\rangle$ daju fazu matričnog elementa. Gore pomenuti metod se svodi na određivanje rješenja sljedeće jednačine

$$\frac{d}{dt} [I_P t + S_{\mathbf{p}}(t)] = I_P + \frac{1}{2} [\mathbf{p} + \mathbf{A}(t)]^2 = 0. \quad (3.39)$$

Pretpostavimo da imamo periodični vektorski potencijal sa periodom $T = 2\pi/\omega$. Uzimajući u obzir rješenja t_s jednačine (3.39), amplituda (3.38) poprima oblik

$$M_{\mathbf{p}} \propto \sum_n \delta \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2} + I_P + U_P - n\omega \right) \times \sum_s \left(\frac{2\pi i}{S_{\mathbf{p}}''(t_s)} \right)^{1/2} \exp(i[I_P t_s + S_{\mathbf{p}}(t_s)]) \langle \mathbf{p} + \mathbf{A}(t_s) | V | \psi_0 \rangle, \quad (3.40)$$

gdje je sa $S_{\mathbf{p}}''$ označen drugi izvod akcije (3.30) po vremenu. Suma po s ide po svim rješenjima jednačine (3.39) unutar jednog perioda polja (tj. $0 \leq$

$\text{Re } t_s < T$), i to ona rješenja koja imaju pozitivan imaginarni dio. Obično su rješenja SPM metode kompleksna, izuzev kada je $I_P = 0$. Za $I_P = 0$ ponovo dobijemo driftni impuls kao i u klasičnom slučaju (pogledati jednačinu (3.3)). Važno je zabilježiti da imaginarni dio trenutka jonizacije može biti povezan sa vremenom tuneliranja pri samom procesu jonizacije [126].

U jednačini (3.40) amplituda jonizacije je predstavljena kao koherentna suma preko svih sedlastih tačaka unutar jednog perioda laserskog polja. Činjenica da se spektar sastoji od diskretnih energija

$$E_{\mathbf{p}} \equiv \frac{\mathbf{p}^2}{2} = n\omega - U_P - I_P, \quad (3.41)$$

može biti pripisano interferenciji doprinosa iz različitih perioda. Ova interferencija je destruktivna, izuzev kad vrijednost energije odgovara jednom od diskretnih pikova definisanih sa (3.41). U zavisnosti od oblika vektorskog potencijala $\mathbf{A}(t)$ i njegove simetrije, postojaće nekoliko rješenja t_s (u slučaju sinusoidalnog polja, biće dva u gornjoj poluravni i dva u donjoj koja su ujedno kompleksno konjugirana prethodno pomenutim rješenjima) unutar jednog optičkog ciklusa laserskog polja. Njihova interferencija je odgovorna za efekte vidljive u proračunatom spektru. Međutim, teško ih je opaziti eksperimentalno. Razlog je njihova velika osjetljivost na intenzitet laserskog polja. Pošto u većini eksperimenata kontrola intenziteta nije dovoljno kvalitetna, ovi efekti su obično slabo vidljivi u spektru.

Interferencija, također, postoji i u slučaju eliptički polarizovanog polja za određeni impuls elektrona kao funkciju elipticiteta. Kako je elipticitet u eksperimentima bolje definisan nego li intenzitet, ovakve vrste interferencije su opažene [106]. Upravo ćemo nešto više o ovome izložiti u sljedećem odjeljku koji je posvećen interferenciji amplituda direktnih elektrona.

Amplituda (3.38) dopušta operiranje sa vektorskim potencijalom $\mathbf{A}(t)$ proizvoljnog oblika. Također, nije ograničena samo na monohromatsko polje. Za puls konačne dužine sedlaste tačke su još uvijek određene jednačinom (3.39). Međutim, u tom slučaju se gubi bilo kakva periodičnost. Kao posljedica toga diskretnost spektra je izgubljena. Interferencija različitih dijelova pulsa može voditi neočekivanim efektima [127]. Dok je za beskonačno dugi monohromatski puls spektar simetričan pri $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, ta vrsta simetrije (eng. forward-backward symmetry) ne vrijedi u slučaju konačnog pulsa. Analiza prostorne asimetrije spektra mogla bi pomoći pri određivanju dužine pulsa ili apsolutne faze envelope [118].

3.3.2 Interferencija amplituda za direktne elektrone

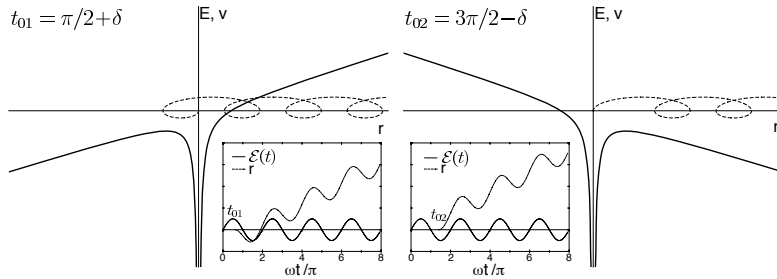
Za linearno polarizovano polje i driftni impuls $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{e}}_x$, pri čemu je zadovoljeno $|p| \leq A_L$, postoje dva moguća trenutka jonizacije $\omega t_{01} = \pi/2 + \delta$ i $\omega t_{02} = 3\pi/2 - \delta$. Odgovarajuće klasične orbite su prikazane na slici 3.5. Kako je već naglašeno u prethodnim odjeljcima, dok za vektorski potencijal vrijedi

$$\mathbf{A}(t_{01}) = \mathbf{A}(t_{02}), \quad (3.42)$$

to jačina polja zadovoljava sljedeću relaciju

$$\mathbf{E}(t_{01}) = -\mathbf{E}(t_{02}). \quad (3.43)$$

Na osnovu ovoga možemo zaključiti da elektroni jonizovani u odgovarajućim trenucima t_{01} i t_{02} započinju kretanje u kontinuumu u suprotnim pravcima. Kako je prikazano na slici 3.5 električno polje mijenja znak odmah nakon trenutka t_{01} . Dakle, elektron jonizovan u tom trenutku, u momentu izmjene znaka polja se okreće u suprotnom smjeru, te poslije poprima isti driftni impuls kao i elektron jonizovan u trenutku t_{02} , koji zadržava svoj početni smjer kretanja. Za očekivati je kvantno-mehaničku interferenciju doprinosa ova dva kanala jonizacije.



Slika 3.5: Klasične trajektorije (iscrtkane krive) elektrona sa istim driftnim impulsom. Na grafiku su prikazani efektivni potencijali $V(x) + xE(t)$ u trenucima t_{01} (lijevo) i t_{02} (desno). Elektron jonizovan u trenutku t_{01} pod uticajem električnog polja vrlo brzo promijeni smjer kretanja, dok elektron jonizovan u trenutku t_{02} zadržava svoj početni smjer kretanja. Ovo je pojednostavljena slika fizikalnog procesa koja treba da naglasi interferenciju dva kanala direktnih elektrona [118].

Za eliptičku polarizaciju, klasično, postoji najviše jedan trenutak jonizacije za dati driftni impuls. Međutim, jednačina sedlaste tačke (3.39) uvijek ima više od jednog rješenja za stacionarne trenutke odvajanja. Za polje koje je karakterisano vektorskim potencijalom oblika (3.7) i odgovarajući impuls elektrona

$$\mathbf{p} = \sqrt{2E_p} \hat{\mathbf{e}}_x, \quad (3.44)$$

te uslov $|\xi| \neq 1$ rješenja su data sa

$$\cos \omega t_s = \frac{1}{\zeta \sqrt{1 + \xi^2}} \left[-\sqrt{\epsilon} \pm \sqrt{\epsilon \xi^2 - \gamma^2(1 - \xi^2) - \xi^2 \zeta} \right], \quad (3.45)$$

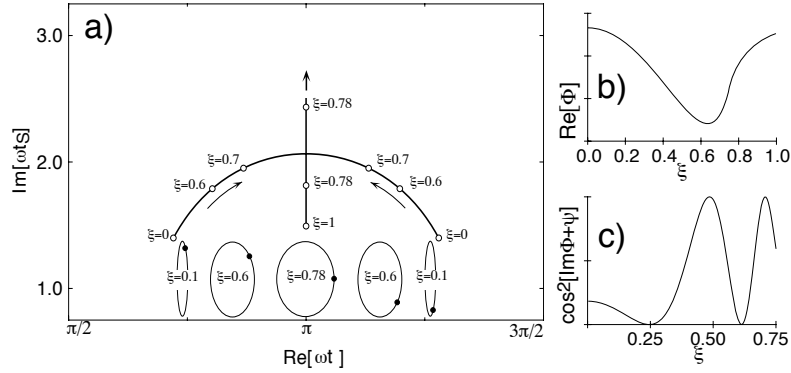
gdje je $\zeta = (1 - \xi^2)/(1 + \xi^2)$, a $\epsilon = E_p/2U_P$. Obično rješenja t_s dolaze u kompleksno konjugiranim parovima. Rješenja u gornjoj poluravni doprinose amplitudi (3.40). Upravo ta rješenja su naznačena na slici 3.6. Za $-\xi_0 < \xi \leq \xi_0$, gdje ξ_0 predstavlja nulu drugog kvadratnog korijena na desnoj strani jednačine (3.45), taj korijen je imaginaran, pa su rješenja simetrična u odnosu na $\text{Re } \omega t_s = \pi$. Za $|\xi| \geq \xi_0$, ovaj kvadratni korijen je realan i otuda sva rješenja imaju $\text{Re } \omega t_s = \pi$. Ovo ima veoma bitne posljedice za saddle-point amplitudu (3.40). U prvom slučaju oba rješenja doprinose amplitudi, te ujedno dolazi do njihove interferencije. Ovo odgovara slučaju linearne polarizacije izloženom na početku odjeljka. U drugom slučaju, prateći konturu po kojoj se integrira u kompleksnoj ravni dolazimo do zaključka da će njome biti obuhvaćeno samo jedno rješenje i to ono bliže realnoj osi [118]. Dakle, u ovom slučaju nemamo interferenciju. U prvom slučaju amplituda može biti napisana u obliku $M_p \sim \exp(\text{Re } \Phi) \cos(\text{Im } \Phi + \psi)$, dok u drugom slučaju nedostaje član sa kosinusom. Oba argumenta su predstavljena u desnom dijelu slike 3.6.

Paulus je krajem devedesetih opazio efekte interferencije koji su prikazani na slici 3.7 [106]. Primjećujemo da postoje dijelovi spektra u vidu talasa i to kao funkcija elipticiteta. Oni se kreću ka manjim vrijednostima elipticiteta sa porastom energije. Isto je opaženo pri numeričkom proračunu amplitude (3.40) [106].

Za eliptičku polarizaciju KFR amplituda mora biti primijenjena sa dozom opreza: ona predviđa četverostruku (eng. fourfold) simetriju, dok eksperiment pokazuje samo inverzionu simetriju. Da bi se izbjegla ova neslaganja neophodno je naći precizniji opis potencijala veze (pogledati rad [128] i reference unutar njega). Prostorna zavisnost uvedenih Coulomb-Volkovljevih rješenja, umjesto prije korištenih Volkovljevih (3.28), narušavaju fourfold simetriju, te su pri proračunu ugaone distribucije korištena upravo ova rješenja. Međutim, čak i za potencijal nultog dometa fourfold simetrija je narušena, ako se koristi teorija preciznija od KFR aproksimacije (pogledati revijalni rad [118] i reference unutar njega).

3.3.3 Kvantno-mehanički opis visokoenergetskih elektrona

Da bi uključili mogućnost naknadnog rasijanja u kvantno-mehanički opis moramo dopustiti da oslobođeni elektron još jednom interagira sa jonom

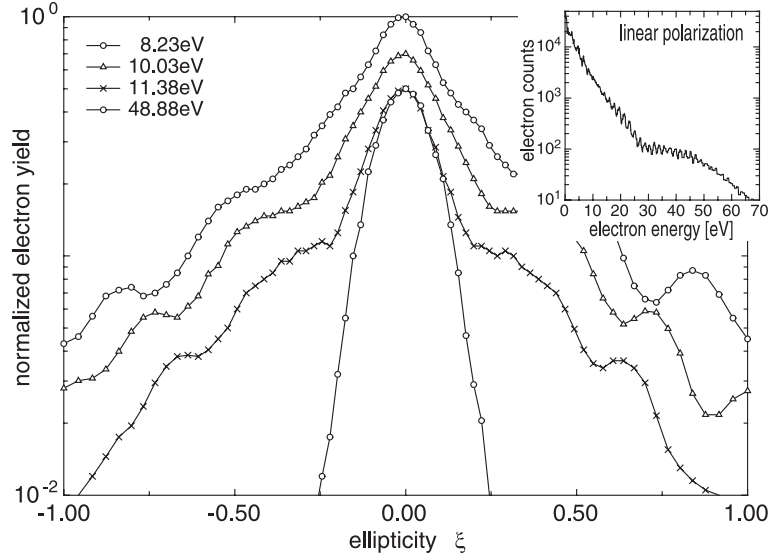


Slika 3.6: Sedlaste tačke ωt_s u gornjoj poluravni kompleksne ωt ravni dobivene iz jednačine (3.45) u intervalu $\pi/2 \leq \text{Re} \omega t \leq 3\pi/2$ za $E_P = n\omega - I_P - U_P$, gdje je $n = 17$ broj apsorbovanih fotona laserskog polja. Ionizacijska energija je $I_P = 15.76$ eV, ponderomotorni potencijal $U_P = 3.68$ eV, a frekvencija $\omega = 1.96$ eV. Strelice pokazuju smjer kretanja sedlastih tačaka sa porastom elipticiteta ξ . Dvije grane se sastaju pri vrijednosti elipticiteta $\xi = 0.755$. Za nekoliko vrijednosti elipticiteta ξ umetnute su elipse koje opisuje vektor električnog polja, a njegova pozicija u trenutku odvajanja elektrona $\text{Re} t_s$ je označena tačkama. U gornjem dijelu slike, desno, je predstavljena zavisnost funkcije $\text{Re} \Phi$ od elipticiteta ξ . Postojanje doline pri vrijednosti ξ_0 je povezano sa “dodging” efektom. U donjem desnom dijelu je prikazana zavisnost funkcije $\cos^2(\text{Im} \Phi + \psi)$ od elipticiteta ξ . Oscilacije ove funkcije potiču od konstruktivne, odnosno destruktivne interferencije [106].

[129]. Prije svega, vratimo se na egzaktnu jednačinu (3.33) koja predstavlja odgovarajuću amplitudu vjerovatnosti jonizacije elektrona i u nju umetnimo Dysonovu integralnu jednačinu (3.32). Ovakav pristup daje dva člana. Pored toga, analogno postupku koji smo sproveli u 3.3.1, zamijenimo egzaktno konačno stanje $|\psi_P\rangle$ sa Volkovljevim stanjem (3.34) i egzaktni operator vremenske evolucije U sa odgovarajućim Volkovljevim operatorom vremenske evolucije U_f (3.35). Drugim riječima, mi zanemarujemo interakciju sa atomskim potencijalom veze $V(\mathbf{r})$, izuzev za jednu interakciju koja je eksplicite naznačena u Dysonovoj jednačini. Ova procedura odgovara primjeni Bornove aproksimacije u slučaju procesa rasijanja. Od ova dva člana, prvi odgovara direktnoj amplitudi (3.36) ili (3.38). Drugi član opisuje proces naknadnog rasijanja. Ponovno parcijalnom integracijom, slično već iznešenom u vezi jednačine (3.37), ova dva člana mogu biti kombinovana u jedan. Dakle, imamo

$$M_P = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_0 \langle \psi_P^{(Vv)}(t_1) | V U_f(t_1, t_0) V | \psi_0(t_0) \rangle. \quad (3.46)$$

Fizikalni sadržaj amplitude (3.46) odgovara mogućnosti povratka elektrona matičnom jonu. Elektron je oslobođen i nalazi se u kontinuumu u



Slika 3.7: Prinos fotoelektrona različitih energija, nastalih jonizacijom iznad praga atoma ksenona, pri intenzitetu laserskog polja $I = 1.2 \cdot 10^{14} \text{ W/cm}^2$, kao funkcija elipticiteta ξ . Fotoelektroni su emitovani u pravcu koji se podudara sa većom osom polarizacije eliptički polarizovanog polja. Krive su blago odvojene u vertikalnom pravcu, radi vidljivosti. One pokazuju dva interferentna maksimuma koji se kreću ka manjim vrijednostima elipticiteta sa porastom energije detektovanih elektrona. Maksimumi se polako utapaju u maksimum postignut pri linearnoj polarizaciji, kako se približavamo vrijednosti elipticiteta $\xi = 0$. U gornjem desnom uglu slike je prikazan ATI spektar za linearno polarizovano polje [106].

nekom trenutku t_0 , potom se kreće u kontinuumu pod uticajem laserskog polja, dok se u određenom naknadnom trenutku t_1 ne vrati unutar opsega atomskog potencijala veze i naposljetku se rasije u svoje konačno Volkovljevo stanje.

Egzaktan numerički razvoj amplitude (3.46) za potencijal veze konačnog opsega je veoma komplikovan. Za potencijal nultog dometa integracija po prostornim varijablama u matričnom elementu je trivijalna. Ako se Volkovljeva talasna funkcija i odgovarajući operator vremenske evolucije razviju po Besselovim funkcijama, jedna od integracija po vremenu može biti izvedena analitički dajući δ funkciju, poput one u izrazu (3.40), koja odgovara diskretnim energetske pikovima u spektru. Preostala kvadratura po vremenu putovanja $t_1 - t_0$ mora biti proračunata numerički [93, 129]. Nešto drugačiji metod je da se prvo izračuna integral po vremenu putovanja, a zatim se integral po vremenu povratka t_1 izračuna primjenom brze Fourierove transformacije [119].

Metod sedlaste tačke

Za dovoljno visoke intenzitete laserskog polja integracija po vremenu može biti izvedena saddle-point metodom, slično poput onog sa direktnim elektronima (3.38). Ova procedura nam predočava mnogo više fizikalne pozadine nego li razvoj po Besselovim funkcijama. Osim toga, ovakav pristup nam obezbjeđuje vezu sa Feynmanovim integralima po putanjama (pogledati sljedeći odjeljak). Volkovljev operator vremenske evolucije se može raspisati u obliku

$$U_f(t_1, t_0) = \int d^3\mathbf{k} |\psi_{\mathbf{k}}^{(V_v)}(t_1)\rangle \langle \psi_{\mathbf{k}}^{(V_v)}(t_0)|, \quad (3.47)$$

tako da je amplituda $M_{\mathbf{p}}$ predstavljena petodimenzionalnim integralom

$$M_{\mathbf{p}} \sim \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_0 \int d^3\mathbf{k} \exp[iS_{\mathbf{p}}(t_1, t_0, \mathbf{k})] m_{\mathbf{p}}(t_1, t_0, \mathbf{k}), \quad (3.48)$$

gdje je funkcija $m_{\mathbf{p}}$ data sa

$$m_{\mathbf{p}}(t_1, t_0, \mathbf{k}) = \langle \mathbf{p} + \mathbf{A}(t_1) | V | \mathbf{k} + \mathbf{A}(t_1) \rangle \langle \mathbf{k} + \mathbf{A}(t_0) | V | \psi_0 \rangle. \quad (3.49)$$

U slučaju HATI-ja akcija je data sa sljedećim izrazom

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}}(t_1, t_0, \mathbf{k}) = & -\frac{1}{2} \int_{t_1}^{\infty} d\tau [\mathbf{p} + \mathbf{A}(\tau)]^2 \\ & -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} d\tau [\mathbf{k} + \mathbf{A}(\tau)]^2 + \int_{-\infty}^{t_0} d\tau I_P. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Akcija se, kao što vidimo iz gornje relacije, sastoji iz tri dijela, a u skladu sa tri koraka koji čine proces.

Kao i u slučaju jednačine (3.39), SPM aproksimacija amplitude (3.48) predstavlja razvoj faze (3.50) oko njenih stacionarnih tačaka. Osim toga, pretpostavljamo da se funkcija $m_{\mathbf{p}}(t_1, t_0, \mathbf{k})$ slabo mijenja s promjenom svojih argumenata. Svakako, ona je konstantna ako koristimo potencijal nultog dometa.

Sada moramo odrediti stacionarne tačke u odnosu na pet varijabli t_1 , t_0 i $\mathbf{k}$. Tražene tačke predstavljaju rješenja sljedeća tri uslova [tzv. saddle-point method (SPM) jednačine] [111]

$$[\mathbf{k} + \mathbf{A}(t_0)]^2 = -2I_P, \quad (3.51)$$

$$(t_1 - t_0)\mathbf{k} = \int_{t_0}^{t_1} d\tau \mathbf{A}(\tau), \quad (3.52)$$

$$[\mathbf{k} + \mathbf{A}(t_1)]^2 = [\mathbf{p} + \mathbf{A}(t_1)]^2. \quad (3.53)$$

Prvi uslov (3.51) predstavlja zakon održanja energije u trenutku tuneliranja. Drugi uslov (3.52) je, u stvari, uslov povratka elektrona matičnom jonu, a treći (3.53) izražava činjenicu da se elektron elastično rasijava u svoje konačno stanje. Općenito, SPM jednačine imaju nekoliko rješenja $(t_{1s}, t_{0s}, \mathbf{k}_s)$, $(s = 1, 2, \dots)$, od kojih su relevantne samo one za koje vrijedi $\text{Re } t_{1s} > \text{Re } t_{0s}$, jer je tada ispunjeno da se naknadno rasijanje odvija nakon procesa jonizacije. Konačno, matrični element može biti napisan u obliku

$$M_{\mathbf{p}} \sim \sum_s \left(\frac{(2\pi i)^5}{\det(\partial^2 S_{\mathbf{p}} / \partial q_j^{(s)} \partial q_k^{(s)})_{j,k=1,\dots,5}} \right)^{1/2} \times \exp[iS_{\mathbf{p}}(t_{1s}, t_{0s}, \mathbf{k}_s)] m_{\mathbf{p}}(t_{1s}, t_{0s}, \mathbf{k}_s), \quad (3.54)$$

gdje je $q_i^{(s)}$ ($i = 1, \dots, 5$) obuhvata pet varijabli t_{1s} , t_{0s} , $\mathbf{k}_s$. Kako smo već pomenuli za slučaj direktnih elektrona i odgovarajuću amplitudu (3.40), suma obuhvata samo određen podskup ukupnog skupa rješenja sistema (3.51)-(3.53). U ovom slučaju, određivanje podskupa može biti pojednostavljeno izvjesnim trikovima [130]. Za periodično polje suma po optičkim ciklusima u jednačini (3.54) može se izvesti pomoću Poissonove formule. Na taj način suma po sedlastim tačkama ide unutar jednog perioda i time se dobiva δ funkcija kao u jednačini (3.40).

Proračuni se sada sastoje od dva odvojena zadatka. Dakle, prvo treba odrediti rješenja sistema (3.51)-(3.53), pa potom odabrati pogodan podskup tih rješenja i umetnuti ih u izraz (3.54). Bitno je zapaziti da mi primjenjujemo SPM aproksimaciju na amplitudu vjerovatnosti za konačno stanje elektrona sa impulsom $\mathbf{p}$, a ne na kompletnu talasnu funkciju konačnog stanja. Ovo je razlog zašto samo nekoliko rješenja doprinosi toj amplitudi, dok semiklasični proračuni talasne funkcije, koja sadrži sve doprinose, zahtjeva razmatranje veoma velikog broja trajektorija [131]. Kako je $I_P > 0$, uslov sačuvanja energije u trenutku jonizacije (3.51) ne može biti zadovoljen za realno vrijeme t_0 . Kao konsekvencija, sva rješenja $(t_{1s}, t_{0s}, \mathbf{k}_s)$ postaju kompleksna. Ako je jonizacioni potencijal I_P jednak nuli, onda za linearno polarizovano polje jednačina (3.51) implicira da elektron započinje kretanje u kontinuumu sa početnom brzinom nula. U tom slučaju, za dati impuls $\mathbf{p}$ rješenja su realna. Ona odgovaraju rješenjima modela tri koraka ili “simple-man” metoda [31].

Za $I_P \neq 0$ i pod uslovom da je Keldyshev parametar mali u poređenju sa jedinicom, imaginarni dijelovi rješenja sistema (3.51)-(3.53) nemaju velike vrijednosti, te su njihovi realni dijelovi bliski onima dobivenim “simple-man” metodom. U ovom slučaju mogu se naći približna analitička rješenja

saddle-point sistema jednačina, usljed čega dobivamo odgovarajuću analitičku aproksimaciju amplitude (3.48) [132].

U slučaju eliptičke polarizacije, rješenja su uvijek kompleksna, čak i u slučaju $I_P = 0$. Ovo je povezano sa sljedećom činjenicom: za bilo koju polarizaciju mimo linearne, elektron koji počinje kretanje unutar jednog optičkog ciklusa uz početnu brzinu nula nikada se neće vratiti na poziciju gdje je bio oslobođen. Jednačina (3.51) tada daje da je $\mathbf{k} + \mathbf{A}(t_0)$ kompleksni nul vektor.

3.4 Kvantne orbite

Kvantna mehanika je dosta uspješna u pokušaju da razjasni fiziku mikrosvijeta. Njena standardna matematička formulacija za proračune različitih procesa skoro u potpunosti raskida veze sa formalizmom klasične fizike. S druge strane, alternativna formulacija kvantne mehanike koju je razvio Feynman kroz integrale po putanjama, izgrađenim na Lagrangeovom konceptu akcije orbite čestice u prostoru i vremenu, je svakako bliža klasičnoj predstavi fizike. U Feynmanovoj formulaciji, amplituda vjerovatnosti bilo kojeg kvantno-mehaničkog procesa može biti predstavljena kao koherentna superpozicija doprinosa svih mogućih prostorno-vremenskih staza koje povezuju početno i konačno stanje posmatranog sistema. Amplituda vjerovatnoće svake staze je kompleksan broj čija je faza jednaka klasičnoj akciji duž te staze. Iako je ovaj pristup veoma koristan u kvantnoj teoriji polja, on, ipak, nije nikada imao veću praktičnu primjenu u atomskoj fizici. Glavni razlog tome je veliki broj različitih staza koje su potrebne da bi se opisala većina posmatranih procesa.

No ipak, ono što je predočeno u prethodnom odjeljku može se dovesti u direktnu vezu sa Feynmanovim pristupom [47]. Najvažniji rezultat je da smo broj relevantnih staza ograničili, a istovremeno je pomoću njih moguće opisati i objasniti sve važnije karakteristike jonizacije iznad praga višeg reda, kao i svih ostalih srodnih atomskih procesa u jakom laserskom polju.

Ponovimo ukratko rezultate kvantno-mehaničkog pristupa posmatranom procesu, koje smo iznijeli u prethodnim odjeljcima. Zbog velikog uspjeha klasičnog modela “tri koraka” u opisu navedenih procesa, mi smo egzaktnu amplitudu prijelaza zamijenili amplitudom (3.48). To smo izveli uz pomoć SFA, aproksimacije jakog polja. Na taj način smo dobili petodimenzionalni integral i akciju sastavljenu od tri dijela, gdje svaki dio odgovara različitim fazama posmatranog HATI procesa. Prva faza je jonizacija atoma iznad praga, potom kretanje elektrona u jakom laserskom polju uz zanemarivanje eventualne interakcije sa matičnim jonom i naposljetku elastično rasijanje elektrona na matičnom jonu. Konačno, korištenjem saddle-point metode, tj.

traženjem rješenja sistema

$$\frac{\partial S}{\partial t_0} = 0, \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t_1} = 0, \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{k}} = 0, \quad (3.57)$$

odnosno rješenja sistema (3.51)-(3.53) određujemo stacionarne tačke.

Forma dobivenog matričnog elementa (3.54) upravo odgovara Feynmanovim integralima puta. Suma koja figurira u pomenutoj amplitudi, u stvari, odgovara beskonačno dimenzionalnom funkcionalnom integralu u Feynmanovoj interpretaciji. Glavna dobit je da smo navedenim aproksimacijama navedenu sumu sveli na nekoliko relevantnih orbita pomoću kojih možemo opisati sve visoko nelinearne atomske procese u jakom laserskom polju [47].

Dobivena rješenja $(t_{1s}, t_{0s}, \mathbf{k}_s)$ ($s = 1, 2, \dots$) karakterišu početne i granične uslove za elektronsku trajektoriju $\mathbf{r}_s(t)$, koja je rješenje Newtonove klasične jednačine kretanja elektrona u laserskom polju (3.2) za $t > \text{Re } t_{0s}$. Na ovaj način se definišu kvantne orbite elektrona, te je s -ta kvantna orbita data sljedećom relacijom

$$\mathbf{r}_s(t) = \begin{cases} (t - t_{0s})\mathbf{k}_s + \int_{t_{0s}}^t d\tau \mathbf{A}(\tau) & (\text{Re } t_{0s} \leq t \leq \text{Re } t_{1s}), \\ (t - t_{1s})\mathbf{p} + \int_{t_{1s}}^t d\tau \mathbf{A}(\tau) & (t > \text{Re } t_{1s}). \end{cases} \quad (3.58)$$

Ove orbite su u osnovi klasične orbite, ali još uvijek zadržavaju kvantno-mehanički princip da njihova koherentna superpozicija dovodi do interferencije doprinosa različitih orbita. Pored toga, one su kompleksne.

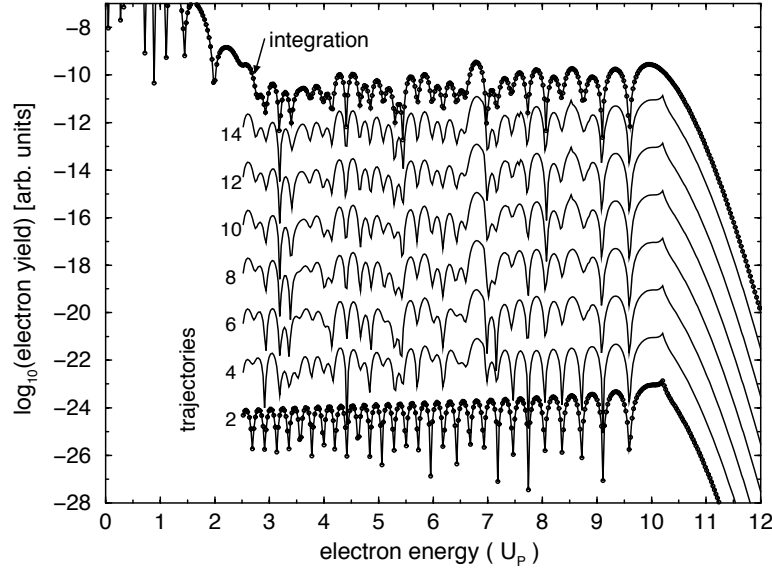
Mi kvantne orbite posmatramo kao funkciju realnog vremena t . Međutim, uslovi $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{0}$ i $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{0}$ su zadovoljeni samo za kompleksna vremena t_0 i t_1 . Kao posljedica toga, kvantne orbite predstavljene jednačinom (3.58) kao funkcije realnog vremena t neće imati svoj početak u ishodištu, već na “izlazu iz tunela”. Ovo je posve vidljivo na slikama 3.11 i 3.12 koje ćemo predstaviti u odjeljku 3.4.2. Za razliku od trenutka jonizacije t_0 , trenutak povratka t_1 je realan u dobroj aproksimaciji (pogledati sliku 3.10). Dakle, orbite imaju tačku povratka skoro tačno u ishodištu. U odjeljcima koji slijede iznijeti ćemo vrlo moćnu interpretaciju karakteristika HATI spektra pomoću teorije kvantnih orbita. Osim toga, u petom i šestom poglavlju ćemo dati još širu analizu procesa koja uključuje teoriju kvantnih orbita.

3.4.1 Kvantne orbite za linearnu polarizaciju

Proračunati HATI spektar za linearno polarizovano polje intenziteta $I = 10^{15} \text{ W/cm}^2$ je prikazan na slici 3.8 [133]. Energija laserskih fotona je 0.0548 a.j., dok je vrijednost jonizacionog potencijala 0.9 a.j. Puni kružići koji čine krivu na vrhu pomenute slike su proračunati pomoću amplitude (3.46) uz izbor potencijala nultog dometa, dok su druge krive ispod nje dobivene uključivanjem određenog broja kvantnih orbita (broj uključenih parova raste idući odozdo prema gore) u okviru SPM aproksimacije (3.54). Na lijevoj strani pored svake krive je naznačen broj uključenih orbita. Spektri koji rezultiraju iz s -tog para orbita (a to uključuje orbite $2s - 1$ i $2s$) su prikazani na slici 3.9. Kvantitativno, prvi par dominira cijelim spektrom. Doprinos drugog para je, također blizak prvom, odgovarajući cutoff se nalazi na energijama oko $7U_P$. Doprinos trećeg para je već slabiji u poređenju sa prethodna dva para barem za jedan red veličine. Sljedeći parovi jedva da igraju bilo kakvu ulogu. Na slici 3.8 već treća kriva odozdo se slaže sa egzaktnim proračunom.

Zavisnost parametara t_{1s} , $t_{1s} - t_{0s}$ i $\mathbf{k}_s$ od energije elektrona E_p je predstavljena na slici 3.10 i to za dvije orbite ($s = 1, 2$) koje imaju najkraća vremena putovanja. Ovi parametri jedinstveno specificiraju kvantne orbite u vremenu i prostoru. Njihovo ponašanje je vrlo različito za energije ispod, odnosno iznad mjesta odsijecanja koje daje klasični pristup. Ispod cutoffa imaginarni dijelovi pomenutih parametara su slabo zavisni od energije. Osim toga, obje orbite moraju biti uključene u sumu (3.54), te njihova interferencija dovodi do efekata koji su posve vidljivi na slici 3.8. Imaginarni dijelovi od vremena povratka t_{1s} i impulsa k_{xs} su maleni (k_{xs} je komponenta impulsa $\mathbf{k}_s$ u smjeru polarizacije laserskog polja koje je u ovom poglavlju izabrano da bude u smjeru x -ose). U suprotnosti sa tim, imaginarni dijelovi vremena putovanja $t_{1s} - t_{0s}$ koji su povezani preko t_{0s} sa stopom tuneliranja su značajni. U vezi s tim pogledati sliku 3.6 gdje su naznačeni trenuci jonizacije za direktne elektrone. Otuda zaključujemo da su nakon rasijanja orbite faktički realne, dakle, elektron je informaciju o jonizaciji putem tuneliranja "izgubio". Vrijednosti parametara dviju orbita ($s = 1, 2$) približavaju se jedne drugima u blizini pozicije klasičnog cutoffa. U određenoj tački jedna od te dvije orbite (označena iscrtkano) mora biti odbačena iz sume (3.54). Ovo prouzrokuje male šiljke vidljive na slici 3.8. Za energije iznad klasičnog cutoffa samo jedna orbita daje doprinos i nema interferencije. Realni dijelovi parametara ostaju približno konstantni, dok imaginarni dijelovi jako rastu sa porastom energije. Kao posljedicu toga imamo nagli pad spektra poslije cutoffa. Slično ponašanje imamo kao funkciju elipticiteta, kako je prikazano na slici 3.6.

Procedura odbacivanja jedne od orbita svakog para poslije cutoffa može

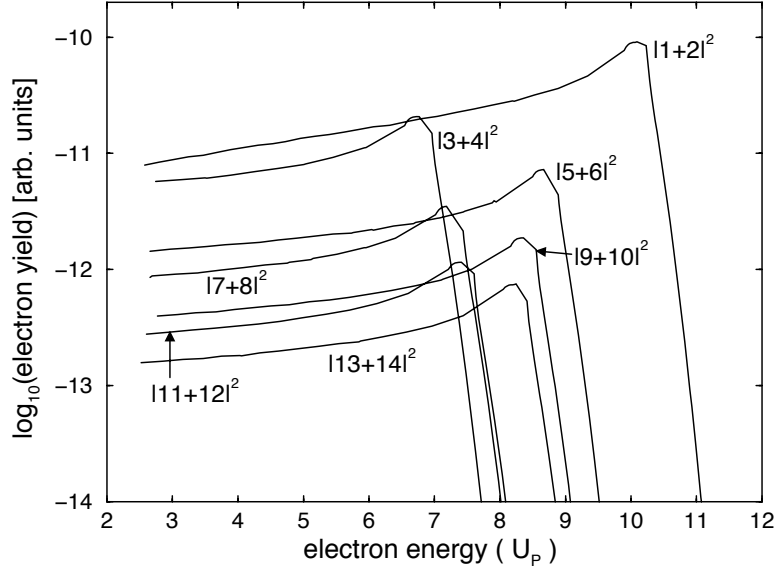


Slika 3.8: Prinos fotoelektrona (na logaritamskoj skali), emitovanih u pravcu linearno polarizovanog polja, kao funkcija kinetičke energije elektrona, koja je predstavljena preko umnožaka ponderomotornog potencijala. Intenzitet laserskog polja je $I = 10^{15} \text{ W/cm}^2$, frekvencija $\omega = 0.0584 \text{ a.j.}$, dok je jonizaciona energija atoma $I_P = 0.9 \text{ a.j.}$ Kriva na vrhu (puni kružići) predstavlja egzaktan rezultat, dobiven korištenjem amplitude (3.46). Preostale krive su dobivene korištenjem amplitude (3.54), koja uzima u obzir rješenja metoda sedlaste tačke. Idući odozdo prema gore, sve veći broj kvantnih orbita je uključivan u račun. Rezultati su pomjereni jedni u odnosu na druge, a radi mogućnosti usporedbe. Kriva na dnu predstavlja doprinos samo prvog para orbita, dakle orbita sa najkraćim vremenom putovanja. Prva kriva iznad nje, obuhvata doprinose dva para orbita sa najkraćim vremenom putovanja, itd. Mali šiljci koji se javljaju pri pozicijama cutoffova su posljedica određenih nedosljednosti u primjeni metoda sedlaste tačke [130].

biti zamijenjena mnogo rigoroznijom metodom. U blizini cutoffa je moguće koristiti uniformnu aproksimaciju [134].

3.4.2 Kvantne orbite za eliptičku polarizaciju

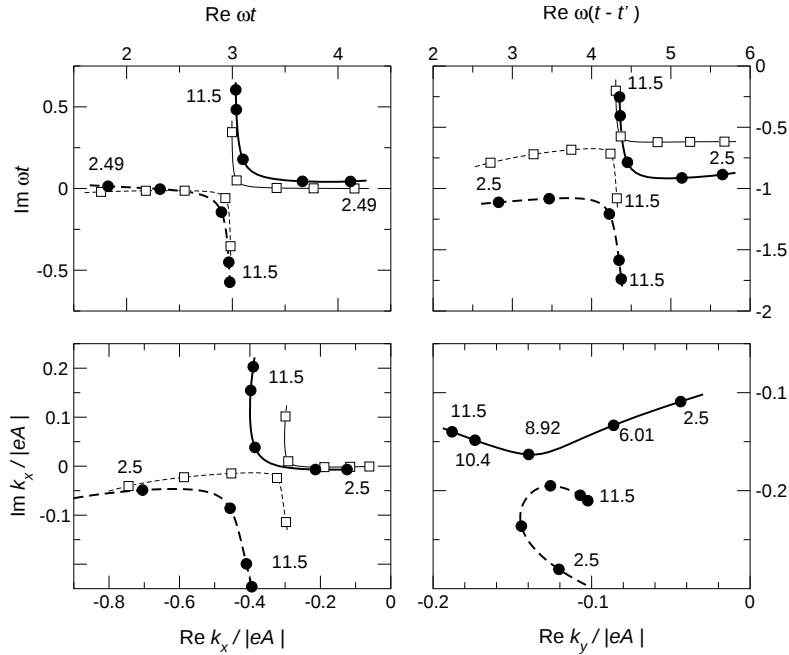
Klasični “simple-man” model se susreće sa velikim problemima pri pokušaju da opiše naknadno rasijanje kod eliptički polarizovanog polja. Problem je što se elektron, koji je oslobođen u kontinuumu sa početnom brzinom nula, skoro nikada ne može vratiti na mjesto s kojeg je započeo kretanje. Ovo se vidi analiziranjem SPM jednačina (3.51)-(3.53). Za $I_P = 0$, te uz uslov da rješenja budu realna, jednačina (3.51) daje $\mathbf{k} = -\mathbf{A}(t_0)$. Za linearnu polarizaciju ostaju dvije jednačine koje se rješavaju po t_0 i t_1 : jednačina (3.53) i x projekcija jednačine (3.52). Realna rješenja se mogu dobiti ako



Slika 3.9: Envelope doprinosa pojedinih parova orbita (logaritamska skala), kao funkcija kinetičke energije elektrona, izražene preko umnožaka ponderomotornog potencijala. Pozicije cutoffova odgovarajućih parova orbita se slažu sa pozicijama cutoffova na slici 3.3 [130].

je odgovarajući konačni impuls $\mathbf{p}$ detektovanog elektrona prihvatljiv unutar klasičnog modela. U slučaju eliptičke polarizacije, pak, ostanu nam tri jednačine za rješavanje. Naime, moraju biti razmatrane i x i y projekcija jednačine (3.52). Otuda ne postoji “simple-man” model za slučaj eliptičke polarizacije, čak i kada je $I_P = 0$. Isti problemi nastaju pri razmatranju HHG procesa. No, to ne znači da ne postoje navedeni procesi za eliptičku polarizaciju. Kvantno-mehaničkom talasnom funkcijom možemo postići opis ovih procesa pri eliptičkoj polarizaciji. Šireći talasni paket elektrona pri povratku se može preklapati sa matičnim jonom (pogledati [118] i reference unutar njega). Potpuno odsustvo HHG-a za cirkularno polarizovano polje se uzima kao potvrda mehanizma naknadnog rasijanja. Međutim, ovaj zaključak ne bi trebao biti rigorozan, pošto ipak i tada postoji vjerovatnost za određeno preklapanje. Druga pretpostavka je da je odsustvo HHG procesa u ovom slučaju posljedica ili izbornih pravila za ugaoni moment ili posljedica destruktivne interferencije.

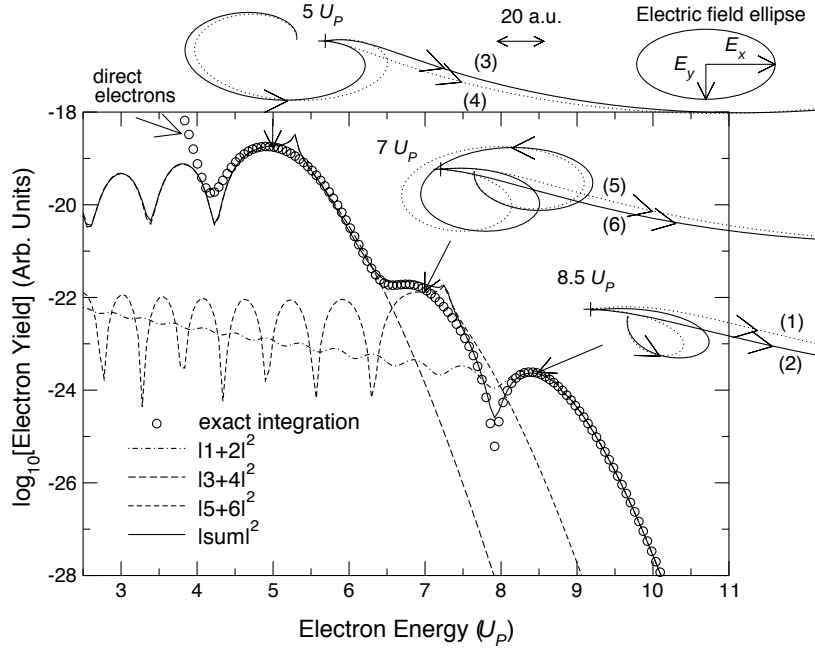
Vratimo se još jednom “simple-man” metodu za eliptički polarizovano polje. Mogao bi se postaviti nešto manje strog zahtjev oko eventualnog povratka elektrona na mjesto oslobađanja u kontinuumu, odnosno dopustiti mogućnost da fotoelektron posjeduje početnu brzinu različitu od nule. No ipak, takvi zahtjevi vode ka velikom stepenu proizvoljnosti što je nedopus-



Slika 3.10: Rješenja $(t_s, t_s - t'_s, \mathbf{k}_s)$ sistema saddle-point jednačina (3.51)-(3.53) su predstavljena u kompleksnoj ravni u zavisnosti od kinetičke energije elektrona E_p za prvi par orbita ($s = 1, 2$). Na slici je sa t_s naznačen trenutak povratka (u tekstu je odgovarajući analog t_{1s}), dok je sa t'_s obilježen trenutak jonizacije (u tekstu t_{0s}). Krive praćene punim kružićima odgovaraju eliptičkoj polarizaciji ($\xi = 0.5$), dok su sa kvadratićima prikazani rezultati vezani za linearnu polarizaciju. Ostali parametri su isti kao na slici 3.8. Vrijednosti koje se pojavljuju duž krivih predstavljaju kinetičku energiju elektrona izraženu preko umnožaka ponderomotornog potencijala. Iscrtkane krive moraju biti odbačene iz sume u (3.54) nakon pozicije cutoffa [130].

tivo. Umjesto toga, treba riješiti SPM jednačine (3.51)-(3.53), odnosno prihvatiti i na pravi način interpretirati ta kompleksna rješenja. Rezultati takvih proračuna su prikazani na slici 3.11. Plato, koji potiče od naknadno rasijanih elektrona u slučaju linearno polarizovanog polja, sada se javlja u obliku stepenica za eliptički polarizovano polje. Svaki dio može biti pridružen jednom posebnom paru kvantnih orbita. Za svaki dio stepenaste strukture platoa, u vrhu slike su prikazani realni dijelovi pridruženih orbita. Kao i u slučaju linearno polarizovanog polja (slike 3.3 i 3.9), pozicija cutoffa odgovarajućeg para orbita varira sa rastom vremena putovanja. Glavna razlika između orbita u slučaju linearne i eliptičke polarizacije je da su u drugom slučaju orbite dvodimenzionalne i okružuju jon. Par orbita sa najkraćim vremenom putovanja produkuje dio spektra koji prethodi krajnjem cutoffu. Međutim, ovaj dio spektra ima veoma slab doprinos u poređenju sa doprinosom elektrona

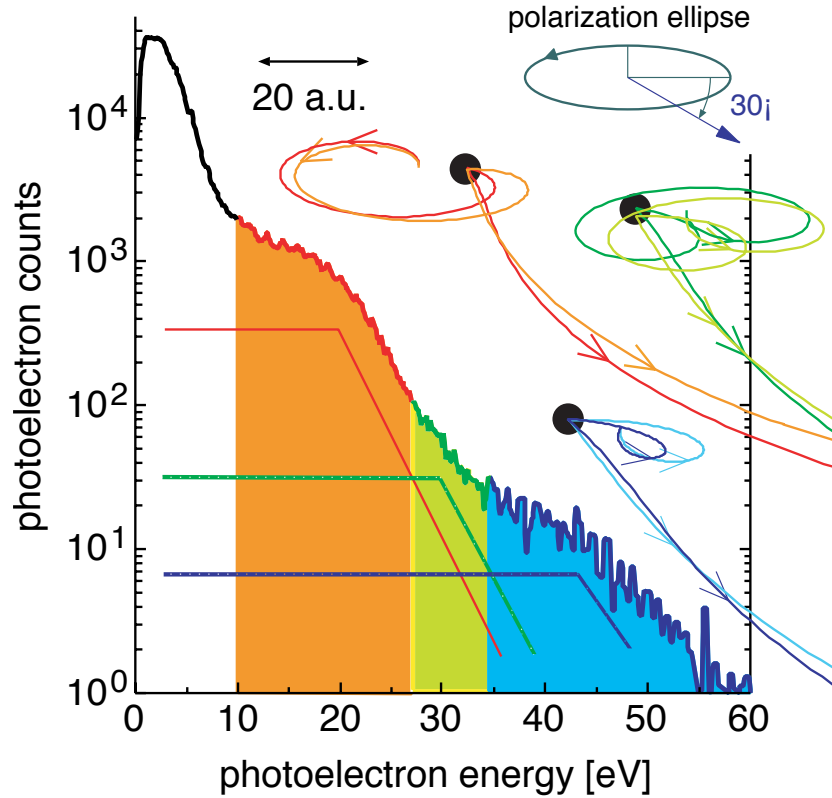
nižih energija. Ovi posljednji su generisani orbitama sa dužim vremenom putovanja. Možemo primijetiti da je doprinos parova sa dužim vremenima putovanja u slučaju linearne polarizacije minoran (pogledati sliku 3.9).



Slika 3.11: Spektar jonizacije iznad praga višeg reda u slučaju eliptički polarizovanog polja datog sa (3.6), gdje je $\xi = 0.5$. Emitovani su elektroni, energija između $2.5 U_P$ i $10.5 U_P$, samo u pravcu velike ose polarizacije polja. Ostali parametri su: frekvencija $\omega = 1.59$ eV, intenzitet $I = 5 \cdot 10^{14}$ W/cm² i jonizacioni potencijal atoma $I_P = 24.5$ eV. Otvoreni kružići predstavljaju spektar dobiven pomoću (3.46), uz korištenje potencijala nultog dometa. Ostale krive prikazuju spektar dobiven pomoću (3.54), a koji uključuje: par orbita $s = 1, 2$ sa najkraćim vremenom putovanja (tačkasto-iscrtkana kriva), par orbita $s = 3, 4$ (kriva predstavljena sa dužim crtama), par orbita $s = 5, 6$ (kratke crtice) i naposljetku kriva koja uzima u obzir doprinose sva tri para orbita sa najkraćim vremenom putovanja (puna linija). Neke od ovih krivih se međusobno preklapaju, djelomično ili potpuno. Orbite koje odgovaraju pojedinim dijelovima spektra su predstavljene desno od spektra (prve dvije orbite odgovaraju krajnjem dijelu spektra, naredne dvije početnom dijelu širokog platoa, dok posljednje dvije odgovaraju njegovom centralnom dijelu). Pozicija jona je označena krstićem. Jasno se vidi da orbite startuju iz tačke udaljene nekoliko atomskih jedinica od pozicije jona, dok se pri povratku kraj orbite poklapa sa pozicijom jona. Eksperimentalni podaci za sličnu situaciju su prikazani na slici 3.12 [48].

Intuitivno, struktura stepenica u dobivenom HATI spektru za eliptički polarizovano polje se može objasniti na sljedeći način. Povratak elektrona ka matičnom jonu je moguć ako elektron ima početnu brzinu različitu od nule. Ova brzina je uglavnom sa izrazitijom komponentom u pravcu male

ose polarizacije laserskog polja. Što je veća ova brzina, manji je doprinos odgovarajućih orbita spektru. Ovo može biti poređeno sa distribucijom transverznog impulsa u Gaussovom talasnom paketu [118]. Za najkraće orbite veća komponenta polja promijeni znak, te usljed toga uspijeva vratiti elektron ka matičnom jonu u ovom pravcu, dok manja komponenta ima isti znak tokom trajanja procesa naknadnog rasijanja. Upravo zbog toga je potrebna velika početna brzina u ovom pravcu da bi kompenzirala driftni impuls induciran manjom komponentom polja. Za duže orbite i manja komponenta mijenja smjer, također u toku vremena putovanja, pa je usljed toga manja početna transverzalna brzina potrebna da bi došlo do povratka elektrona matičnom jonu. Ovo može biti potvrđeno i oblikom orbita prikazanih na slici 3.11. Parametri dviju najkraćih kvantnih orbita su naznačeni na slici



Slika 3.12: Spektar koji odgovara jonizaciji iznad praga višeg reda atoma ksenona za eliptički polarizovano polje oblika (3.6), pri čemu je $\xi = 0.36$, a intenzitet polja $I = 7.7 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$. Elektroni su emitovani pod uglom 30° u odnosu na veću osu polarizacije. Različiti dijelovi spektra su povezani sa odgovarajućim doprinosom različitih parova kvantnih orbita. Orbite predstavljene u gornjem dijelu slike su dobivene pomoću (3.58). Simbolom krsta je naznačena pozicija atoma [47].

3.10, te ih možemo uporediti sa parametrima analognih orbita za linearno polarizovano polje. Za eliptički polarizovano polje, impuls $\mathbf{k}_s$ ima dvije komponente različite od nule, k_{xs} i k_{ys} . Obje imaju značajne vrijednosti imaginarnih dijelova, posebno k_{ys} . Ovo možemo povezati sa neadekvatnim tretmanom eliptičke polarizacije u okviru klasičnog “simple-man” modela, kako je već prije navedeno. Za orbite $s = 3, 4$, koje nisu prikazane na 3.10, imaginarni dijelovi komponenti impulsa su mnogo manji, a u skladu sa činjenicom da je doprinos odgovarajućih elektrona spektru mnogo veći.

Slika 3.12 prikazuje odgovarajući mjereni HATI spektar sa izraženom strukturom u obliku stepenica koju predviđa teorija [47]. Intenzitet laser-skog polja je $I = 0.77 \cdot 10^{14} \text{ W/cm}^2$, dok je elipticitet $\xi = 0.36$. Prvi dio spektra (energije ispod 10 eV) potiče od direktnih elektrona. Naredni dijelovi strukture spektra korespondiraju onima na slici 3.11. Realni dijelovi prikazanih orbita, proračunati iz sistema (3.51)-(3.53) su naznačeni u gornjem desnom uglu slike. Da bi se postigao maksimalan kontrast stepenica, spektar je snimljen pri uglu emisije fotoelektrona od 30° u odnosu na veću osu polarizacije.

3.5 Uticaj potencijala veze

Poboljšana KFR amplituda (3.46) može biti raspisana za proizvoljan potencijal veze $V(\mathbf{r})$. Razvoj po članovima jonizacionog potencijala, uvedenog pomoću Dysonove jednačine (3.32), je već pomenuta SFA ili aproksimacija jakog polja. Odgovarajuća procedura odgovara Bornovoj aproksimaciji. SFA je validna sve dok je amplituda oscilatornog kretanja elektrona tako velika da je većina njegovih orbita van opsega uticaja potencijala veze. Ovo je na trivijalan način ispunjeno u slučaju potencijala nultog dometa. Međutim, bitno je naglasiti da amplituda (3.46), isto kao i SPM aproksimacija (3.54), vrijede u slučaju širokog opsega različitih vrsta potencijala. Bez obzira na oblik potencijala, SPM jednačine (3.51)-(3.53) daju startnu poziciju, odnosno poziciju povratka elektrona pri centru potencijala veze. Izabrani potencijal u amplitudu vjerovatnosti ulazi samo preko form faktora datih sa (3.49). Uslov da bi SFA bila primjenljiva je da ovi form faktori slabo zavise od vremena. Aproksimacija je opravdanija ako je odabrani tip potencijala manjeg dometa, tako da form faktori u (3.49) slabo zavise i od impulsa. Pobuđena vezana stanja ne ulaze u amplitudu (3.46) bez obzira na tip uključenog potencijala.

3.5.1 Potencijal nultog dometa

Trodimenzijski potencijal nultog dometa (zero-range potential) možemo iskazati relacijom

$$V(\mathbf{r}) = \frac{2\pi}{\kappa} \delta(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} r. \quad (3.59)$$

Ovaj oblik potencijala podržava jedno (s-val) vezano stanje pri energiji $-\kappa^2/2$. Bez regularizacionog operatora $(\partial/\partial r)r$ koji djeluje na sljedeće stanje, ovaj oblik potencijala ne dopušta postojanje bilo kakvih vezanih stanja. Postoji nekoliko načina da se podesi parametar κ za određeni atom ili jon.

Potencijal (3.59) je bio uključen u većini proračuna izloženih u prethodnim odjeljcima ovog poglavlja. Kako smo već kazali, potencijal ulazi u izraze za amplitudu jonizacije samo preko form faktora (3.49). Označimo sa $V_{\mathbf{pk}}$ prvi, odnosno sa $V_{\mathbf{k}0}$ drugi form faktor na desnoj strani (3.49). Određujući parametar κ iz uslova

$$-\frac{\kappa^2}{2} = -I_P, \quad (3.60)$$

možemo zapisati (3.59) na sljedeći način

$$V(\mathbf{r}) = \frac{2\pi}{\sqrt{2I_P}} \delta(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} r. \quad (3.61)$$

Uvrštavajući (3.61) u (3.49) dobijemo da su odgovarajući form faktori konstantni i dati sljedećim izrazima

$$V_{\mathbf{pk}} = \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{2I_P}}, \quad (3.62)$$

i

$$V_{\mathbf{k}0} = -\frac{(2I_P)^{1/4}}{2\pi}. \quad (3.63)$$

Kao primjer usporedbe HATI spektra dobivenog metodom sedlaste tačke u kojoj figurira zero-range potencijal sa spektrom koji se dobije numeričkim rješavanjem vremenski zavisne Schrödingerove jednačine za atom vodonika pogledati [135]. Postoji jako dobro kvalitativno slaganje u području širokog platoa, posebno kada su u pitanju pozicije nastale destruktivnom interferencijom. Slaganje je unutar par procenata. Ova poređenja potvrđuju da detaljniji opis potencijala ima relativno mali značaj za HATI spektar. Na kraju napomenimo, da su najbolje opisani realni fizikalni sistemi pomoću zero-range potencijala negativni joni.

3.5.2 Yukawa potencijal

Razmotrimo u ovom odjeljku uticaj Yukawa potencijala u SPM aproksimaciji na HATI spektar. Pretpostavimo da je Yukawa potencijal prikazan relacijom

$$V(r) = -\exp(-\alpha r)/r, \quad (3.64)$$

gdje je α parametar ekranizacije. Odgovarajući form faktori su na osnovu prethodnog izraza i relacije (3.49) dati sa

$$V_{\mathbf{pk}} = -\frac{1}{(2\pi^2)} \frac{1}{(\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 + \alpha^2}, \quad (3.65)$$

i

$$V_{\mathbf{k}0} = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{(1 + \alpha)^2 + [\mathbf{k} + \mathbf{A}(t_0)]^2}. \quad (3.66)$$

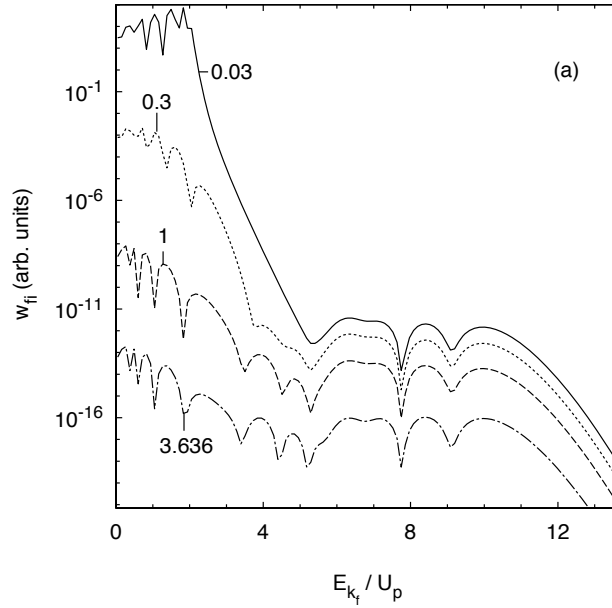
Koristeći jednačinu (3.51), dakle, prvu jednačinu saddle-point aproksimacije, dobijemo

$$V_{\mathbf{k}0} = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{(1 + \alpha)^2 - 2I_P}. \quad (3.67)$$

Kako vidimo iz gornjeg izraza, u SPM aproksimaciji $V_{\mathbf{k}0}$ djeluje kao konstanta. To vrijedi, također, za bilo koji sferno-simetrični potencijal u pomenutoj aproksimaciji. Ova konstanta određuje ukupnu stopu jonizacije. S druge strane, ona ne utiče na oblik spektra. Osim toga, spektar direktnih elektrona, opisan amplitudom (3.38), je nezavisan od oblika potencijala veze, pošto zavisi samo od $V_{\mathbf{k}0}$, za razliku od dijela spektra koji potiče od naknadno rasijsanih elektrona. U radu [134] je detaljnije analiziran uticaj Yukawa potencijala, kao i potencijala nultog dometa na HATI spektar.

3.5.3 Coulombov potencijal i naknadno rasijsanje

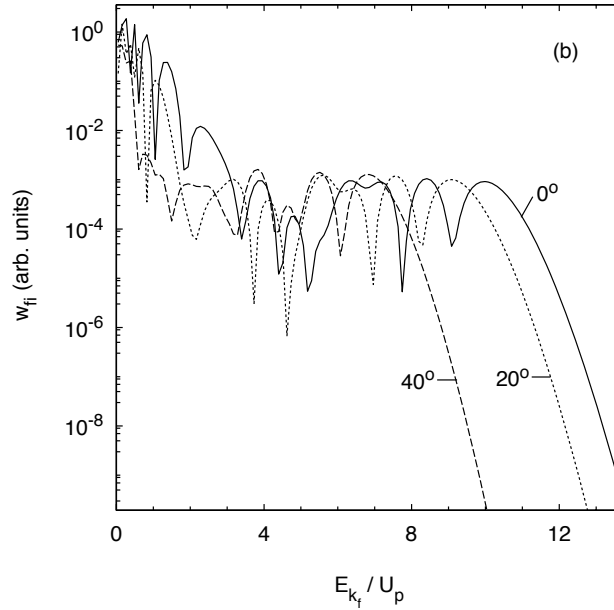
U radu [93] predstavljena je generalizacija KFR modela koji uključuje drugi red razvoja S -matričnog elementa. Na taj način se opisuje i efekat naknadnog rasijsanja na matičnom jonu. Korišten je Yukawa potencijal ili tzv. ekrani-zirani Coulombov potencijal. Dakle, za potencijal je korišten izraz (3.64), gdje se ujedno mijenjao parametar ekranizacije ili zasjenjenja označen sa α . Razmatrano je linearno polarizovano polje. U ovom slučaju je integral po impulsu međustanja $\mathbf{k}$ nađen u SPM aproksimaciji. Preostala faza u kojoj figuriše konačni impuls fotoelektrona je aproksimirana razvojem u red po Besselovim funkcijama. Konačno, kvadratura po vremenu τ izvedena je



Slika 3.13: Vjerovatnost procesa jonizacije iznad praga višeg reda kao funkcije energije fotoelektrona (izražene preko U_P) za različite vrijednosti parametra ekranizacije (puna kriva - $\lambda = 0.03$ a.j., tačkasta kriva - $\lambda = 0.3$ a.j., iscrtkana kriva - $\lambda = 1$ a.j. i tačkasto-iscrtkana kriva - $\lambda = 3.636$ a.j.) Vrijednost ugla je $\theta_f = 0^\circ$. Intenzitet laserskog polja je $I = 10^{14}$ W/cm², a frekvencija $\omega = 1.17$ eV [93].

metodom brze Fourierove transformacije. Na slici 3.13 je prikazana diferencijalna brzina jonizacije kao funkcija kinetičke energije jonizovanog elektrona podijeljene sa ponderomotornom energijom za različite vrijednosti parametra ekranizacije α , dok je na slici 3.14 ona predstavljena za različite uglove između jonizovanog elektrona i ose polarizacije polja. Intenzitet laserskog polja je $I = 10^{14}$ W/cm², a frekvencija laserskih fotona $\omega = 1.17$ eV. Ugao između impulsa jonizovanog elektrona i ose polarizacije laserskog polja na slici 3.13 je $\theta_f = 0$.

Sa slike 3.13 možemo primijetiti da razlika između odgovarajućih stopa jonizacije za direktne, odnosno naknadno rasijane elektrone, dosta zavisi od parametra α . Pri nižim vrijednostima α , tj. kada imamo približno Coulombov potencijal, razlika je skoro za 15 redova veličine. Ovo objašnjava zašto pri proračunima sa čistim Coulombovim potencijalom (u teorijskim pristupima Keldyshevog tipa) široki plato nije opažen. Manja razlika je prisutna za veće vrijednosti α , te je i slaganje sa eksperimentom bolje. U skladu sa rezultatima ovog rada, α bi trebalo biti oko jedinice, da bi dobili slaganje sa eksperimentom. Ovo nam govori da potencijal matičnog jona koji osjeća elektron



Slika 3.14: Vjerovatnost procesa jonizacije iznad praga višeg reda kao funkcije energije fotoelektrona (izražene preko U_P) za različite vrijednosti ugla između ose polarizacije laserskog polja i impulsa jonizovanog elektrona (puna kriva - $\theta_f = 0^\circ$, tačkasta kriva - $\theta_f = 20^\circ$ i iscrtkana kriva - $\theta_f = 40^\circ$). Parametar ekranizacije je $\lambda = 3.636$ a.j. Intenzitet laserskog polja je $I = 10^{14}$ W/cm², a frekvencija $\omega = 1.17$ eV [93].

pri povratku nije čisti Coulombov, već potencijal ostatka atoma zasjenjen unutrašnjom elektronskom raspodjelom.

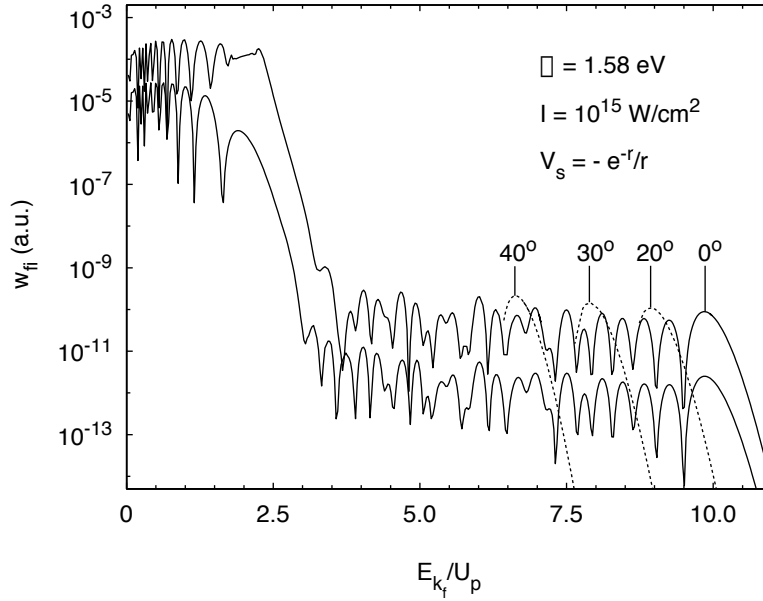
Što se tiče slike 3.14, možemo primijetiti sljedeće: za veće vrijednosti ugla θ_f cutoff se pojavljuje pri nižim energijama detektovanog elektrona, što je u skladu sa prethodno iznešenim klasičnim razmatranjima [110]. Pri određenim vrijednostima energije fotoelektrona (oko $7 - 8U_P$ unutar platoa) stopa vjerovatnosti može biti veća za veće vrijednosti ugla, što nam jasno naznačuje prisustvo bočnih krila. Oscilacije prikazanih krivih potiču od kvantno-mehaničke interferencije.

U radu [119] su predstavljeni numerički rezultati na osnovu modela koji uzima u obzir kombinaciju Coulombovog i potencijala kratkog dometa

$$V = V_c + V_s. \quad (3.68)$$

Za potencijal kratkog dometa je, u skladu sa prethodno iznesenim razmatranjem, uzet Yukawin potencijal oblika

$$V_s = -\exp(-r)/r. \quad (3.69)$$

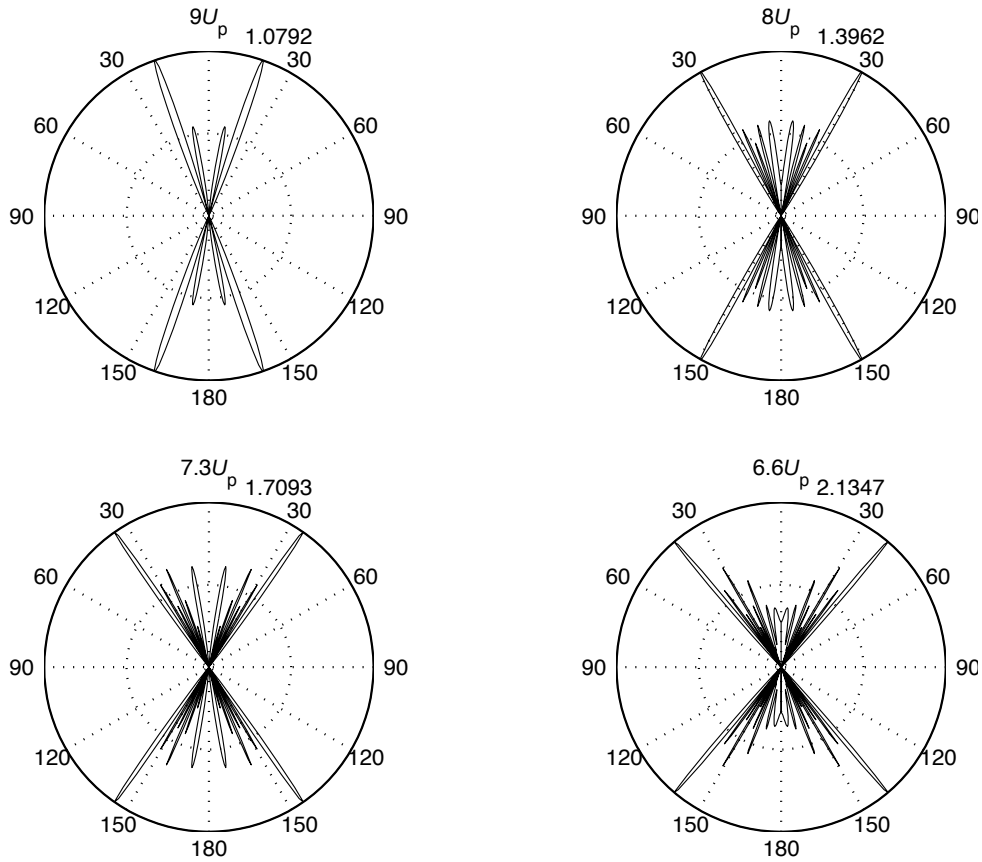


Slika 3.15: Diferencijalne brzine jonizacije w_{fi} za atom vodika kao funkcije kinetičke energije E_{kf} jonizovanog elektrona, date u jedinicama ponderomotorne energije U_P . Frekvencija laserskog polja je $\omega = 1.58$ eV, a intenzitet $I = 10^{15}$ W/cm². Potencijal kratkog dometa je $V_s(r) = -\exp(-r)/r$. Donja kriva je dobijena primjenom modela u kome Coulombovi efekti nisu uključeni, a gornja predstavlja slučaj u kome su uzeti u obzir i Coulombovi i potencijal kratkog dometa. Obje krive su dobijene za ugao $\theta = 0^\circ$ između vektora polarizacije laserskog polja i impulsa jonizovanog elektrona. Maksimumi koji su predstavljeni isprekidanim linijama se odnose na uglove $\theta = 20^\circ, 30^\circ$ i 40° , kao što je označeno na slici. Za svaki ugao prikazan je samo zadnji maksimum (prije cutoffa) [119].

Lasersko polje je linearno polarizovano, intenziteta $I = 10^{15}$ W/cm² i frekvencije $\omega = 1.58$ eV. Kao meta je izabran atom vodika u osnovnom stanju. Što se tiče S -matričnog formalizma, umjesto Volkvljeve valne funkcije koja opisuje konačno stanje elektrona, uzeta je Coulomb-Volkvljeva talasna funkcija, koja prihvata činjenicu da se elektron nakon jonizacije ili naknadnog rasijanja kreće u laserskom polju osjećajući i dalekodosežni Coulombov potencijal.

Na slici 3.15 je predstavljena diferencijalna brzina jonizacije, tj. vjerovatnoća jonizacije u jedinici vremena kao funkcija kinetičke energije izlazećeg elektrona data u jedinicama ponderomotorne energije U_P . Gornja kriva odgovara modelu koji uzima u obzir kombinaciju Coulombovog i kratkodosežnog potencijala, dok donja kriva uključuje prisustvo samo kratkodosežnog potencijala. Ugao između ose polarizacije polja i impulsa izbačenog elektrona je za obje krive $\theta_f = 0$. Sa slike 3.15 vidimo da Coulombovi efekti (gornja

kriva) povećavaju brzinu jonizacije za dva reda veličine i čine prvi plato više izraženim. Ovaj plato odgovara direktnim elektronima i ovakvi rezultati se slažu sa prethodno dobijenim rezultatima u kojima su razmatrani samo Coulombovi efekti bez uzimanja u obzir rescatteringa [136]. U oba slučaja, drugi plato ima oštar cutoff pri energijama od oko $10U_P$. Pozicija cutoffa zavisi od ugla emisije elektrona θ . Sa slike možemo vidjeti i područja cutoffova za različite uglove $\theta = 20^\circ, 30^\circ$ i 40° . Jasno je da se ta područja kreću ka nižim energijama pri porastu ugla θ , što odgovara eksperimental-



Slika 3.16: Bočna krila ATI spektara visokoenergetskih elektrona. Parametri laserskog polja i potencijala kratkog dometa su isti kao na slici 3.15. Diferencijalne brzine jonizacije $w_{\text{H}}(N, \theta)$ su predstavljene kao funkcije polarnog ugla θ (u stepenima) za fiksne vrijednosti broja apsorbiranih fotona N , koje odgovaraju energijama fotoelektrona $E_{k_f} = 9U_P$ (gornji lijevi grafik), $8U_P$ (gornji desni grafik), $7.3U_P$ (donji lijevi grafik) i $6.6U_P$ (donji desni grafik). Brzine jonizacije su u jedinicama 10^{-10} a.j., a podaci su normirani u odnosu na njihove maksimalne vrijednosti za svaki grafik posebno. Npr., maksimalna vrijednost $w_{\text{H}}(N, \theta)$ za $E_{k_f} = 9U_P$ je $1.0792 \cdot 10^{-10}$ a.j. [119].

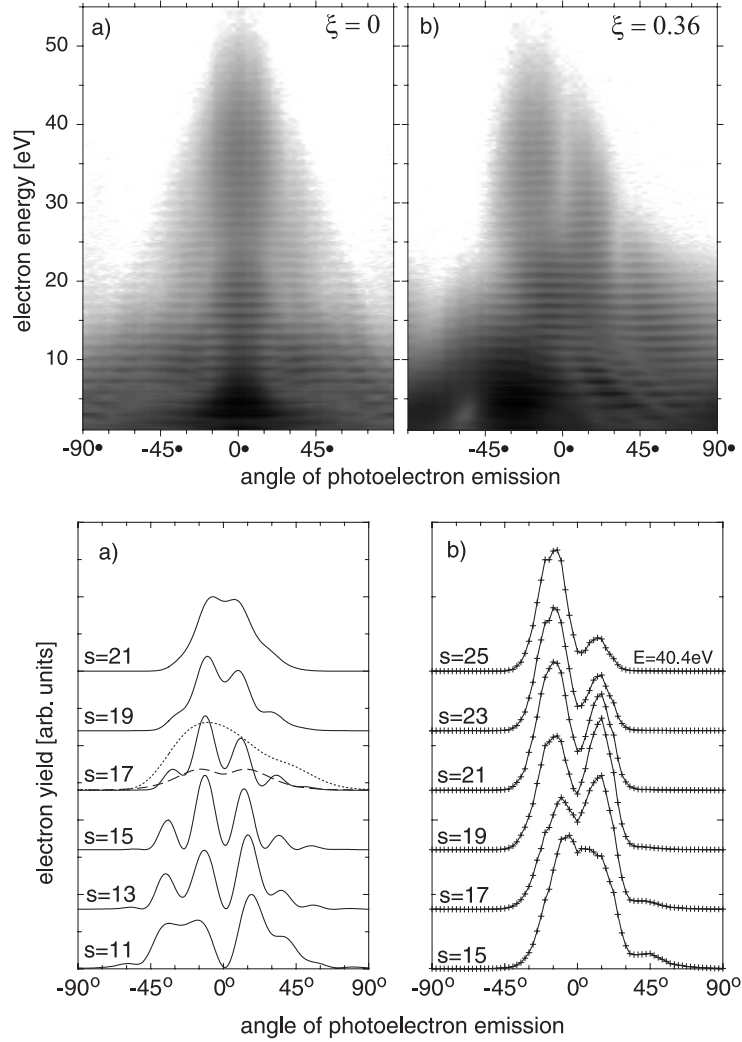
nim rezultatima [133]. Oblici drugog platoa spektra jonizacije iznad praga sa i bez Coulombovih efekata su kvalitativno slični, izuzev što je široki plato u prvom slučaju znatno viši. Drugi plato se sastoji od zaobljenih vrhova i oštih minimuma. Posljednji od vrhova, koji odgovara krajnjem cutoffu, je najviši. Koristeći ovu činjenicu, moguće je objasniti pojavu bočnih krila (eng. sidelobes) u visokoenergetskom dijelu spektra. Naime, bočna krila za ugao θ odgovaraju posljednjem zaobljenom vrhu fotoelektronskog spektra za taj ugao. Na primjer, prema slici 3.15, za $\theta = 20^\circ$ posljednji zaobljeni vrh odgovara energiji fotoelektrona od $9U_P$. Za ugao $\theta = 30^\circ$ maksimalna energija fotoelektrona je $8U_P$.

To se slaže sa podacima na slici 3.16, gdje su prikazane ugaone raspodjele diferencijalnih brzina jonizacije za fiksne vrijednosti broja apsorbovanih fotona N , koje odgovaraju energijama detektovanih elektrona $E_{kf} = 9U_P$, $8U_P$, $7.3U_P$ i $6.6U_P$. Bočna krila za energije fotoelektrona $E_{kf} = 9U_P$ i $E_{kf} = 8U_P$ su upravo na pozicijama $\theta = 20^\circ$ i $\theta = 30^\circ$, respektivno. Sa smanjenjem energije fotoelektrona E_{kf} , ugaone raspodjele postaju komplikovanije, ali su strukture bočnih krila još uvijek primjetne. Za $E_{kf} = 7.3U_P$ i $E_{kf} = 6.6U_P$, bočna krila su na pozicijama $\theta = 35^\circ$ i $\theta = 40^\circ$, respektivno. Diferencijalna brzina jonizacije je određena T -matricom koja ima sljedeću osobinu simetrije: $T_{fi}(N, \pi - \theta) = (-1)^N T_{fi}(N, \theta)$. Upravo ta vrsta simetrije se može vidjeti u strukturi bočnih krila na slici 3.16. Na kraju zaključimo da upotrebom generaliziranog KFR modela koji uključuje, kako Coulombove efekte tako i efekte potencijala kratkog dometa, možemo uspješno objasniti pojavu drugog platoa, te pojavu i tačan položaj bočnih krila. Treba naglasiti da je prednost ovog modela to što se može vrlo uspješno primijeniti i na mnogo složenije atomske sisteme nego je to atom vodonika. Tako npr. plemeniti gasovi mogu biti predstavljeni talasnom funkcijom početnog stanja navedenom u referenci [137] i potencijala jonskih jezgri u referenci [137, 138].

3.5.4 Interferencija amplituda jonizacije za direktne i naknadno rasijane elektrone

U donjem energetskom dijelu platoa HATI spektra elektroni, općenito, mogu dostići datu energiju odmah nakon jonizacije ili poslije naknadnog rasijanja. Upravo zbog toga bi, u tom području platoa, mogli očekivati interferencione efekte ova dva doprinosa. Međutim, na slici 3.8 predloženi rezultati, u slučaju linearno polarizovanog polja visokog intenziteta, pokazuju da je prijelazno područje u kome su doprinosi direktnih, odnosno naknadno rasijanih elektrona približno istog reda veličine, veoma uzano.

S druge strane, u slučaju eliptičke polarizacije, usljed pretvorbe ravnog



Slika 3.17: Gornji paneli: gustina mjenenog EAD-a za ksenon pri intenzitetu od $I = 7.7 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$, odnosno talasnoj dužini 800 nm, za (a) linearno polarizovano i (b) eliptički polarizovano polje ($\xi = 0.36$). Pravac veće ose polarizacije polja je pri 0° . Tamni dio slike je povezan sa velikim prinosom elektrona. Odgovarajući doprinosi mogu biti poređeni samo u horizontalnom smjeru, pošto su podaci normalizovani odvojeno za svaki ATI pik. Za linearnu polarizaciju cutoff je pri energiji $10 U_P = 46 \text{ eV}$. Donji paneli: (a) Teoretski proračun ugaone distribucije, pomoću (3.46), za ATI pikove $s = 11, \dots, 21$ u slučaju eliptičke polarizacije ($\xi = 0.48$). Ionizacioni potencijal je $I_P = 0.436 \text{ a.j.}$, dok je intenzitet laserskog polja $I = 5.7 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$. Za ATI pik $s = 17$, doprinosi direktnih elektrona (iscrtkana kriva) i naknadno rasijanih elektrona (tačkasta kriva) su prikazani odvojeno. (b) Eksperimentalno dobivena ugaona distribucija, izvučena sa gornjeg panela (b) za ATI pikove $s = 15, \dots, 25$ [118].

platoa u strukturu stepenica (pogledati sliku 3.11), doprinosi ATI, odnosno HATI elektrona ostaju približno istog reda veličine unutar prilično velikog opsega energija prijelaznog područja. Interferencioni efekti su opaženi i eksperimentalno u energetske razloženoj ugaonoj distribuciji elektrona (eng. Energy-resolved Angular Distribution, EAD) [139].

Slika 3.17 pokazuje usporedbu EAD-a za linearnu i eliptičku polarizaciju pri istom intenzitetu laserskog polja $I = 7.7 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$. Talasna dužina laserskog zračenja je 800 nm. Metu su činili atomi ksenona. Za linearnu polarizaciju, uobičajen plato u pravcu polarizacije polja je značajan. Bočna krila (eng. “sidelobes”) koja odgovaraju “rainbow” naknadnom rasijanju, a koje smo već pominjali u prethodnim odjeljcima, su također vidljiva. U slučaju eliptičke polarizacije plato se dijeli u dva dijela, jedan ulijevo od pravca veće ose polarizacije polja i drugi nešto slabiji, desno od ose polarizacije. Donji panel iste slike pokazuje EAD-e niza HATI pikova, gdje je interferencija izraženija (desna strana), poredeći ih sa rezultatima teorijskih proračuna izvedenih korištenjem amplitude (3.46). Parametri koji su bili uključeni u proračune ne daju rezultate u potpunoj saglasnosti sa eksperimentom. Ova razlika posebno dolazi do izražaja kod direktnih elektrona u slučaju eliptički polarizovanog polja. Ipak, bitno je da i teoretski rezultati pokazuju iste efekte. Da bi smo otklonili sumnje da li navedeni efekti zaista potiču od interferencije direktnih i rasijanih elektrona, dva doprinosa su prikazana odvojeno za jedan od pikova, recimo, $s = 17$ (donji panel, lijevo). Niti jedan od njih ne pokazuje strukturu koja bi poticala od interferencije, dok to upravo čini njihova koherentna superpozicija.

Poglavlje 4

Uticaj jonizacionog potencijala na zakon odsijecanja

U ovom poglavlju je razmatran proces jonizacije iznad praga višeg reda nastao upotrebom jakog laserskog polja linearne polarizacije. Pri analizi je korištena aproksimacija jakog polja, kao i formalizam kvantnih orbita. Kao rezultat te analize, izvedena je analitička formula koja opisuje zakon odsijecanja krajnjeg, visokoenergetskog dijela HATI spektra. Dakle, maksimalna kinetička energija elektrona je data sa $10.007U_P + 0.538I_P$ [140]. Prvi član sa ponderomotornom energijom U_P odgovara već dobro poznatom klasičnom zakonu odsijecanja, izvedenom u trećem poglavlju ovog magistarskog rada, dok je drugi član novi rezultat i predstavlja zavisnost maksimalne kinetičke energije elektrona od jonizacionog potencijala atoma I_P . Valjanost ove formule je potvrđena usporedbom sa numeričkim proračunima visokoenergetskog dijela spektra. U narednom, petom poglavlju rada, ćemo analizom koja uključuje aproksimaciju metodom sedlaste tačke (SPM metod) uvidjeti opravdanost korekcije klasičnog zakona odsijecanja HATI spektra.

U prvom odjeljku ovog poglavlja kratko ćemo se osvrnuti na zakone odsijecanja srodnih atomskih procesa u jakom laserskom polju. Neke od njih smo već naveli u drugom poglavlju. Potom ćemo, u drugom dijelu ovog poglavlja, iznijeti odgovarajuću kvantno-mehaničku teoriju koja vodi ka rezultatima koji potvrđuju zavisnost visokoenergetskog dijela spektra od jonizacionog potencijala. U trećem poglavlju će biti izveden prethodno pomenuti zakon odsijecanja koji uključuje novi član, te ćemo ga usporediti sa raspoloživim eksperimentalnim rezultatima.

4.1 Zakon odsijecanja za različite atomske procese

Kako smo već vidjeli, atomi i molekuli izloženi uticaju jakog laserskog polja mogu emitovati elektrone i fotone veoma velikih energija. Također smo pokazali da se ovi procesi kvalitativno mogu opisati pomoću modela tri koraka. Prvi korak je sama jonizacija. Elektron biva oslobođen putem tuneliranja ili multifotonske jonizacije. Dok je prvi korak čisto kvantno-mehaničke prirode, drugi korak, ubrzanje elektrona jakim laserskim poljem, može biti razmatran unutar granica klasične fizike, tj. rješavanjem Newtonove jednačine kretanja elektrona u laserskom polju. U trećem koraku se elektron može vratiti matičnom jonu. Pri tome može doći do rekombinacije sa matičnim jonom, uz emisiju visokoenergetskog fotona (proces HHG) ili do elastičnog rasijanja što vodi ka HATI procesu, odnosno neelastičnog rasijanja koje vodi ka nesekvencijalnoj dvostrukoj jonizaciji (NSDI). Visokoenergetski spektar elektrona ili fotona opaženih u ovim procesima je karakterisan širokim platom (energetski interval unutar kojeg je vjerovatnost procesa približno konstantna) koji se završava naglim padom, koji nazivamo cutoff. Ovaj cutoff može biti određen klasično. Tako smo vidjeli u drugom poglavlju da je klasični zakon odsijecanja za HHG proces dat sa jednačinom (2.3). Analogan klasični zakon odsijecanja za HATI proces dat je jednačinom (3.21). Jednačinom (2.5) je prikazan klasični cutoff u slučaju NSDI procesa, pri čemu je pretpostavljeno da je prvi elektron jonizovan paralelno sa osom koja se podudara sa osom polarizacije laserskog polja. Klasični zakon odsijecanja može biti izveden i za druge procese u jakom laserskom polju. Tako jednačine date sa (2.2), (2.10) i (2.11) predstavljaju odgovarajuće klasične cutoffove za procese koji se mogu odvijati i bez prisustva laserskog polja: elektron-atomsko rasijanje, elektron-jonska rekombinacija i rasijanje X-zraka na atomu u jakom laserskom polju, respektivno.

Zakon odsijecanja zavisi od parametara laserskog polja. Prethodno navedeni zakoni odsijecanja odgovaraju slučaju kada je upotrebljeno linearno polarizovano lasersko polje. Odgovarajući analitički izraz koji predstavlja zakon odsijecanja za HHG proces pri eliptički polarizovanom polju je izveden u radu [30], a u slučaju bicirkularnog polja je razmatran u radu [50]. Struktura dodatnog platoa koji se javlja pri procesu XSCA, uz prisustvo dodatnog vanjskog statičkog polja, je razmatrana poluklasično u radu [96]. Rezultati vezani za proces HHG-a u prisustvu dodatnog statičkog magnetnog i električnog polja su predstavljeni u radu [141]. Analitičke procjene za pozicije cutoffova visokoenergetskog dijela spektra pri različitim atomskim procesima u jakom laserskom polju, dobiveni u okviru kvazienergetskog pristupa i

upotrebom potencijala kratkog doseg, su prikazani u [142].

Kako smo već kazali, prvi korak pri opisu ovih procesa razmatramo kao kvantnomehanički efekat, te bi ujedno ovaj korak trebao imati uticaj i na zakon odsijecanja krajnjeg dijela plato strukture. Ovo je prvi put opaženo u slučaju HHG-a [29], te je poslije takav pristup generalizovan da bi se objasnila multiplato struktura HHG spektra dobivenog primjenom eliptički polarizovanog laserskog polja [30]. Modificirani zakon odsijecanja za HHG spektar, pri linearno polarizovanom laserskom polju je dat sa

$$\Omega_{\max} = 3.173U_P + 1.325I_P, \quad (4.1)$$

gdje je, jasno, $\Omega_{\max}$ maksimalna energija emitovanog harmonika, a U_P i I_P ponderomotorna energija i jonizacioni potencijal, respektivno. Uspoređujući ovaj zakon odsijecanja i onaj klasični, izražen jednačinom (2.3), vidimo da je izvršena neznatna korekcija drugog člana.

Uprkos činjenici da je klasični zakon odsijecanja za HATI proces otkriven prije više od deset godina [110], njegova kvantno-mehanička popravka do danas nije izvršena. To je, upravo i glavni cilj ovog poglavlja: izvesti odgovarajuću modifikaciju zakona odsijecanja visokoenergetskog dijela HATI spektra, tako da on sadržava i zavisnost od jonizacionog potencijala.

4.2 Kvantno-mehanički pristup

U ovome odjeljku ćemo iznijeti teoriju koja je prethodila numeričkom računu na osnovu kojeg zaključujemo da konačni zakon odsijecanja zavisi i od jonizacionog potencijala. Neke od koraka, koje smo naznačili u trećem poglavlju, ovdje ćemo ponoviti, a radi preglednosti i kompletnosti postupka. Dakle, pretpostavimo da posmatramo atom koji se u početnom trenutku nalazi u svom osnovnom stanju, opisanom valnom funkcijom $|\psi_i(t)\rangle = |\psi_i\rangle \exp(iI_P t)$, gdje je I_P jonizaciona energija atoma. Atom je ozračen laser-skim pulsom koji je karakterisan sa odgovarajućim vektorskim potencijalom $\mathbf{A}(t)$ i električnim poljem $\mathbf{E}(t) = -d\mathbf{A}(t)/dt$. Amplituda vjerovatnosti za detekciju ATI elektrona sa impulsom $\mathbf{p}$ i kinetičkom energijom $E_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/2$ je data sa

$$M_{\mathbf{p}i} = -i \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t dt_0 \langle \psi_{\mathbf{p}}(t) | U(t, t_0) \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t_0) | \psi_i(t_0) \rangle. \quad (4.2)$$

U gornjem izrazu $U(t, t_0)$ je evolucioni operator Hamiltonijana

$$H(t) = -\frac{\nabla^2}{2} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t) + V(\mathbf{r}), \quad (4.3)$$

gdje je sa $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t)$ opisana interakcija između elektrona i laserskog polja u $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ kalibraciji i uz korištenje dipolne aproksimacije. Interakcija elektrona sa ostatkom atoma, zanemarujući uticaj laserskog polja, je opisana sa $V(\mathbf{r})$. Stanja $\psi_{\mathbf{p}}$ i ψ_i su stanja elektrona sa asimptotskim impulsom $\mathbf{p}$ i osnovno stanje, respektivno. Odgovarajući Hamiltonijan atoma je dat sa $H_i = -\nabla^2/2 + V(\mathbf{r})$. Evolucionni operator $U(t, t_0)$, kako smo već naglasili u trećem poglavlju, zadovoljava Dysonovu jednačinu

$$U(t, t_0) = U_L(t, t_0) - i \int_{t_0}^t dt' U_L(t, t') V U(t', t_0), \quad (4.4)$$

gdje je $U_L(t, t')$ evolucionni operator Hamiltonijana $H_L(t) = -\nabla^2/2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t)$ slobodnog elektrona u laserskom polju. Vlastita stanja vremenski zavisne Schrödingerove jednačine sa Hamiltonijanom $H_L(t)$ su Volkovljeva stanja [poglavlje 1, izraz (1.58)]

$$|\psi_{\mathbf{p}}^{(L)}(t)\rangle = |\mathbf{p} + \mathbf{A}(t)\rangle \exp[-iS_{\mathbf{p}}(t)], \quad (4.5)$$

gdje je

$$S_{\mathbf{p}}(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' [\mathbf{p} + \mathbf{A}(t')]^2. \quad (4.6)$$

Sa $|\mathbf{q}\rangle$ ćemo označavati stanje ravnog vala, kako smo to već definisali preko (3.29) ¹. Volkovljev evolucionni operator se može razviti kao [izraz (3.47)]

$$U_L(t, t_0) = \int d^3\mathbf{k} |\psi_{\mathbf{k}}^{(L)}(t)\rangle \langle \psi_{\mathbf{k}}^{(L)}(t_0)|. \quad (4.7)$$

Jednačine (4.2) i (4.4) su egzaktnе. Uvođenjem aproksimacije jakog polja, tj. zamjenjujući $\langle \psi_{\mathbf{p}}(t) | U(t, t_0)$ sa $\langle \psi_{\mathbf{p}}^{(L)}(t) | U(t, t_0)$ u jednačini (4.2), te nakon toga U sa U_L na desnoj strani jednačine (4.4), dobićemo

$$M_{\mathbf{p}i}^{\text{SFA}} = M_{\mathbf{p}i}^{(0)} + M_{\mathbf{p}i}^{(1)}, \quad (4.8)$$

gdje je

$$M_{\mathbf{p}i}^{(0)} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \langle \psi_{\mathbf{p}}^{(L)}(t_0) | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t_0) | \psi_i(t_0) \rangle, \quad (4.9)$$

odnosno

$$M_{\mathbf{p}i}^{(1)} = - \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \int_{t_0}^{\infty} dt \langle \psi_{\mathbf{p}}^{(L)}(t) | V(\mathbf{r}) U_L(t, t_0) \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t_0) | \psi_i(t_0) \rangle. \quad (4.10)$$

¹ $\langle \mathbf{r} | \mathbf{q} \rangle = (2\pi)^{-3/2} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})$.

Amplituda $M_{\mathbf{p}i}^{(0)}$ je KFR amplituda koja opisuje direktni ATI proces [120], dok je amplituda $M_{\mathbf{p}i}^{(1)}$ odgovorna za opis visokoenergetskog platoa u energetskom spektru elektrona nastalih jonizacijom iznad praga. To, upravo, odgovara generalizaciji već iznešenog modela “tri koraka” [31] za proces jonizacije iznad praga višeg reda [46, 110, 118].

Potencijal $V(\mathbf{r})$, u SAE aproksimaciji, predstavlja optimizirani jednočestični potencijal koji elektron osjeća pri povratku matičnom jonu. O izboru potencijala ćemo više govoriti u šestom poglavlju, kada budemo predstavljali HATI spektar i njegove karakteristike.

Koristeći mogućnost zamjene redosljeda dva ravnopravna puta integracije u izrazu (4.10) $\int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \int_{t_0}^{\infty} dt [\dots] = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t dt_0 [\dots]$, te uvodeći smjenu varijabli $\tau = t - t_0$, pri čemu je $dt_0 dt = -dt d\tau$, matrični element $M_{\mathbf{p}i}^{(1)}$ možemo pisati kao

$$M_{\mathbf{p}i}^{(1)} = - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} d\tau \langle \psi_{\mathbf{p}}^{(L)}(t) | V(\mathbf{r}) \times U_L(t, t - \tau) \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t - \tau) | \psi_i(t - \tau) \rangle. \quad (4.11)$$

Koristeći sada izraze (4.5) i (4.7), gornju jednačinu pišemo u obliku

$$M_{\mathbf{p}i}^{(1)} = - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} d\tau \int d^3\mathbf{k} \exp \{ i [S_{\mathbf{k}}(t - \tau) - S_{\mathbf{k}}(t)] \} \times \langle \psi_{\mathbf{p}}^{(L)}(t) | V(\mathbf{r}) | \mathbf{k} + \mathbf{A}(t) \rangle \times \langle \mathbf{k} + \mathbf{A}(t - \tau) | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t - \tau) | \psi_i(t - \tau) \rangle. \quad (4.12)$$

Sljedeći korak je integracija po impulsu međustanja $\mathbf{k}$. Prije nego to učinimo, iskoristimo (4.6), te potom uvedimo smjenu

$$\mathbf{k}_s = -\frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t dt' \mathbf{A}(t') = \frac{1}{\tau} [\boldsymbol{\alpha}(t - \tau) - \boldsymbol{\alpha}(t)], \quad (4.13)$$

gdje je $\boldsymbol{\alpha}(t) = \int^t dt' \mathbf{A}(t')$, odnosno svedimo izraz u eksponentu unutar matričnog elementa na potpun kvadrat, tako da možemo pisati

$$M_{\mathbf{p}i}^{(1)} = - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} d\tau \int d^3\mathbf{k} \times \exp \left\{ i \left[-\frac{\tau}{2} (\mathbf{k} - \mathbf{k}_s)^2 + S_{\mathbf{k}_s}(t - \tau) - S_{\mathbf{k}_s}(t) \right] \right\} \times \langle \psi_{\mathbf{p}}^{(L)}(t) | V(\mathbf{r}) | \mathbf{k} + \mathbf{A}(t) \rangle \langle \mathbf{k} + \mathbf{A}(t - \tau) | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t - \tau) | \psi_i(t - \tau) \rangle. \quad (4.14)$$

Odgovarajući integral po $\mathbf{k}$, označimo ga sa $I_{\mathbf{k}}$, ima sljedeći oblik

$$I_{\mathbf{k}} = \int d^3\mathbf{k} \langle \psi_{\mathbf{p}}^{(L)}(t) | V(\mathbf{r}) | \mathbf{k} + \mathbf{A}(t) \rangle \times \langle \mathbf{k} + \mathbf{A}(t - \tau) | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t - \tau) | \psi_i(t - \tau) \rangle \exp \left[-i \frac{\tau}{2} (\mathbf{k} - \mathbf{k}_s)^2 \right]. \quad (4.15)$$

Rješenje integrala ovog oblika se može naći u dodatku A reference [16] i ono glasi

$$I(\beta, \mathbf{k}_s) = \int d^3\mathbf{k} f(\mathbf{k}) \exp [i\beta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_s)^2] = \left(\frac{i\pi}{\beta}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{i}{4\beta} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{k}_s^2}\right) f(\mathbf{k}_s). \quad (4.16)$$

U našem slučaju $f(\mathbf{k})$ odgovara produktu matričnih elemenata, dok je $\beta = -\tau/2$. Koristeći gore navedeno, možemo pisati da je

$$I_{\mathbf{k}} = \left(\frac{2\pi}{i\tau}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{i}{2\tau} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{k}^2}\right) \langle \psi_{\mathbf{p}}^{(L)}(t) | V(\mathbf{r}) | \mathbf{k} + \mathbf{A}(t) \rangle \times \langle \mathbf{k} + \mathbf{A}(t - \tau) | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t - \tau) | \psi_i(t - \tau) \rangle \big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_s}. \quad (4.17)$$

Sada, koristeći (4.12), (4.14) i (4.17), za amplitudu koja opisuje naknadno rasijanje, možemo pisati

$$M_{\mathbf{p}i}^{(1)} = - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} d\tau \left(\frac{2\pi}{i\tau}\right)^{3/2} \times \exp\{i[S_{\mathbf{k}_s}(t - \tau) - S_{\mathbf{k}_s}(t)]\} \exp\left(-\frac{i}{2\tau} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{k}^2}\right) \times \langle \psi_{\mathbf{p}}^{(L)}(t) | V | \mathbf{k} + \mathbf{A}(t) \rangle \langle \mathbf{k} + \mathbf{A}(t - \tau) | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t - \tau) | \psi_i(t - \tau) \rangle \big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_s}. \quad (4.18)$$

S obzirom na vremensku zavisnost početnog stanja $\psi_i(t) = \psi_i \exp(iI_P t)$ i Volkovljevog stanja (4.5), nakon sređivanja, amplituda prijelaza (4.8) ima sljedeći oblik

$$M_{\mathbf{p}i} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp[i(E_{\mathbf{p}} + I_P + U_P)t] \mathcal{T}_{\mathbf{p}i}(\omega t). \quad (4.19)$$

Uz smjenu $\varphi = \omega t$, $\varphi' = \varphi - \omega\tau$, $\mathcal{T}_{\mathbf{p}i}(\varphi)$ možemo napisati kao

$$\mathcal{T}_{\mathbf{p}i}(\varphi) = \left(\mathcal{T}_{\mathbf{p}i}^{(0)} + \mathcal{T}_{\mathbf{p}i}^{(1)}\right) \exp\{i[\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\varphi) + \mathcal{U}_1(\varphi)]\}, \quad (4.20)$$

gdje je

$$\mathcal{T}_{\mathbf{p}i}^{(0)}(\varphi) = \langle \mathbf{q} | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\varphi) | \psi_i \rangle = i\mathbf{E}(\varphi) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \tilde{\psi}_i(\mathbf{q}), \quad (4.21)$$

odnosno drugi član je dat sa

$$\mathcal{T}_{\mathbf{p}i}^{(1)}(\varphi) = -i \int_0^{\infty} d\tau \left(\frac{2\pi}{i\tau}\right)^{3/2} \times \exp\{i[S_{\mathbf{k}_s}(\varphi') - S_{\mathbf{k}_s}(\varphi) - I_P\tau]\} \exp\left(-\frac{i}{2\tau} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{k}^2}\right) \times V_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} \langle \mathbf{k} + \mathbf{A}(\varphi') | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\varphi') | \psi_i \rangle \big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_s}. \quad (4.22)$$

U prethodna dva izraza smo pretpostavili da je $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p} + \mathbf{A}(\varphi)$, odnosno da je

$$\tilde{\psi}_i(\mathbf{q}) = \int \frac{d^3\mathbf{r}}{(2\pi)^{3/2}} \psi_i(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}), \quad (4.23)$$

$$V_{\mathbf{K}} = \int \frac{d^3\mathbf{r}}{(2\pi)^3} V(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}). \quad (4.24)$$

Funkcija $\mathcal{U}_1(\varphi)$ u jednačini (4.20) je definisana kao periodični dio integrala $\mathcal{U}(t) = \frac{1}{2} \int^t dt' \mathbf{A}^2(t') = \mathcal{U}_1(t) + U_P t$, gdje je U_P ponderomotorni potencijal. Članovi $\mathcal{T}_{\mathbf{p}i}^{(0)}$ i $\mathcal{T}_{\mathbf{p}i}^{(1)}$ odgovaraju jonizaciji bez i sa naknadnim rasijanjem, respektivno. Integral po vremenu leta τ u (4.22) može biti riješen numeričkom integracijom. Razvoj člana $\exp\left(-\frac{i}{2\tau} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{k}^2}\right)$ u istoj jednačini, kojeg smo već pominjali u zadnjem odjeljku trećeg poglavlja, predstavlja vremenski zavisnu WKB aproksimaciju. Za velike vrijednosti t , koja su neophodna u slučaju većih energija fotoelektrona pri naknadnom rasijanju, svi članovi u razvoju, osim onog nultog reda, mogu biti odbačeni [143]. Ako se iskoristi periodičnost laserskog polja sa periodom $T = 2\pi/\omega$, slično kao u [119], možemo napisati

$$\mathcal{T}_{\mathbf{p}i}(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} T_{\mathbf{p}i}(n) \exp(-in\varphi). \quad (4.25)$$

Uvrštavajući gornji izraz u jednačinu (4.19), te koristeći poznatu osobinu delta funkcije, dobivamo sljedeći izraz za amplitudu prijelaza

$$M_{\mathbf{p}i} = -2\pi i \sum_n \delta(E_{\mathbf{p}} + I_P + U_P - n\omega) T_{\mathbf{p}i}(n), \quad (4.26)$$

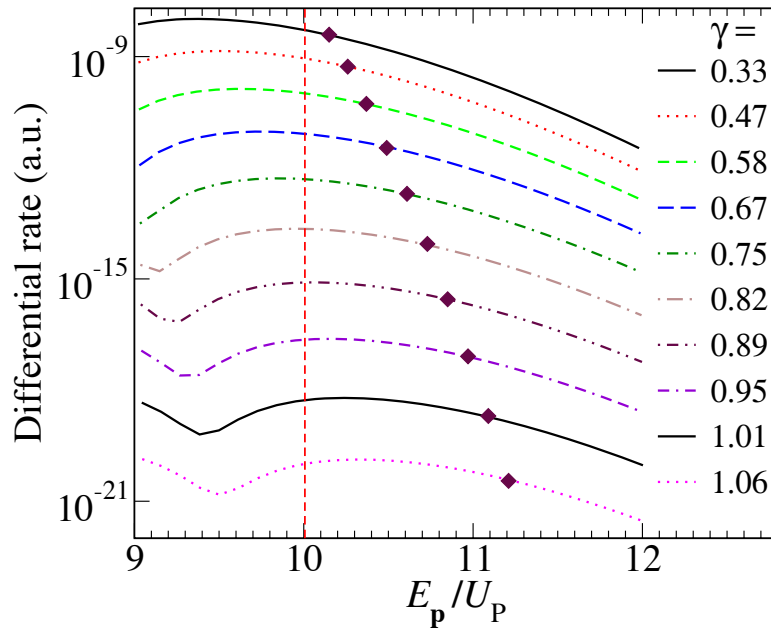
koji iskazuje i zakon očuvanja energije pri apsorpciji n fotona laserskog polja. Diferencijalna vjerovatnoća jonizacije u jedinici vremena uz apsorpciju n fotona je

$$w_{\mathbf{p}i}(n) = 2\pi p |T_{\mathbf{p}i}(n)|^2. \quad (4.27)$$

Usljed izvršene integracije po svim azimutalnim uglovima φ , impulsa emitovanih elektrona $\mathbf{p} = (p, \theta, \varphi)$, u gornjem izrazu se pojavljuje dodatni faktor 2π . U izrazu (4.27) $T_{\mathbf{p}i}(n)$ je definisana sa

$$T_{\mathbf{p}i}(n) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \mathcal{T}_{\mathbf{p}i}(\varphi) \exp(in\varphi). \quad (4.28)$$

Integral po φ u (4.28) može biti proračunat korištenjem brze Fourierove transformacije ili numeričkom integracijom. Jedan od načina rješavanja podintegralnog matičnog elementa u jednačini (4.10) je već pominjani metod sedlaste tačke. Ovdje ga nećemo obrazlagati, mada ćemo u sljedećem odjeljku koristiti neke od rezultata SPM metoda. Razlog je taj, da će cijelo naredno poglavlje biti posvećeno analizi HATI procesa korištenjem upravo ove metode.



Slika 4.1: Diferencijalna brzina jonizacije kao funkcija kinetičke energije jonizovanih elektrona (izražena preko ponderomotornog potencijala U_P) za različite vrijednosti Keldyshovog parametra γ , kako je već naznačeno na desnoj strani slike. Lasersko polje je linearno polarizovano, intenziteta $2 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$ i talasne dužine 1800 nm. Prikazan je samo visokoenergetski dio spektra. Pozicije cutoffova za svaki spektar, dobivene pomoću novog zakona odsijecanja, koji uključuje i jonizacioni potencijal [jednačina (4.52)], su naznačene simbolom dijamanta, dok je pozicija klasičnog zakona odsijecanja $10.007U_P$ prikazana vertikalnom isprekidanom linijom.

Poznato je da se visokoenergetski dio spektra detektovanih fotoelektrona, dobiven gore izloženom aproksimacijom jakog polja, dobro slaže sa egzakt-nim spektrom koji je dobiven rješavanjem vremenski zavisne Schrödingerove jednačine [144, 145]. Upravo zbog toga, prethodno iznešena SFA teorija jako dobro opisuje diferencijalnu vjerovatnost jonizacije u jedinici vremena za područje, kako širokog platoa elektronskog spektra, tako i njegovog krajnjeg dijela koji se završava naglim padom. Na slici 4.1 su predstavljeni rezul-

tati za diferencijalnu vjerovatnoću jonizacije u jedinici vremena kao funkciju kinetičke energije fotoelektrona (u jedinicama ponderomotorne energije) emitovanih u pravcu sa osom polarizacije linearno polarizovanog polja. Predstavljen je samo visokoenergetski dio spektra za fiksnu vrijednost intenziteta laserskog polja i frekvenciju, a za različite vrijednosti Keldyshevog parametra $\gamma = [I_P/(2U_P)]^{1/2}$ [120]. Kako možemo vidjeti sa slike, pozicija cutoffa se kreće ka većim vrijednostima E_P/U_P sa porastom Keldyshevog parametra. Stoga, možemo zaključiti da pozicija cutoffa, odnosno zakon odsijecanja, zavisi od jonizacionog potencijala I_P . Ovo je u suprotnosti sa ustaljenom pretpostavkom da se pozicija krajnjeg odsijecanja visokoenergetskog dijela spektra nalazi pri klasično proračunatoj vrijednosti $E_P = 10.007 U_P$ [110]. U sljedećem odjeljku ćemo izvesti izraz koji predstavlja zakon odsijecanja, a sadrži u sebi korekciju koja prikazuje odgovarajuću zavisnost od jonizacionog potencijala. Na slici 4.1 su vrijednosti dobivene korištenjem novog zakona odsijecanja [pogledati jednačinu (4.52)] naznačene simbolom dijamanta, dok je klasični cutoff obilježen vertikalnom isprekidanom linijom. Vidimo da se te vrijednosti dobro slažu sa numeričkim proračunima.

4.3 Zakon odsijecanja visokoenergetskog dijela HATI spektra

Podintegralni matrični element u (4.10) [uz korištenje izraza (4.7)] može biti predstavljen u obliku $\mathbf{A}_{\mathbf{p}i} \exp(iS_{\mathbf{p}i})$, gdje se akcija $S_{\mathbf{p}i}$, analogno izrazu (3.50), sastoji iz tri dijela

$$S_{\mathbf{p}i}(t, t_0, \mathbf{k}) = -\frac{1}{2} \int_t^\infty dt' [\mathbf{p} + \mathbf{A}(t')]^2 - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' [\mathbf{k} + \mathbf{A}(t')]^2 + I_P t_0. \quad (4.29)$$

Tri člana u izrazu (4.29), a u skladu sa modelom tri koraka, odgovaraju trima različitim koracima HATI procesa. Integral po impulsu međustanja elektrona $\mathbf{k}$ može biti riješen metodom sedlaste tačke. Akcija je stacionarna, tj. $\nabla_{\mathbf{k}} S_{\mathbf{p}i}(t, t_0, \mathbf{k}) = \mathbf{0}$, za impuls

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_s = - \int_{t_0}^t dt' \mathbf{A}(t') / (t - t_0), \quad (4.30)$$

koji je, također, dat jednačinom (4.13). Ovaj uslov odgovara zahtjevu da se elektron vrati matičnom jonu. Uslov stacionarnosti izraza (4.29) u odnosu na dvije preostale varijable integracije t_0 i t vodi ka relacijama

$$[\mathbf{k}_s + \mathbf{A}(t_0)]^2 = -2I_P, \quad (4.31)$$

$$[\mathbf{k}_s + \mathbf{A}(t)]^2 = [\mathbf{p} + \mathbf{A}(t)]^2. \quad (4.32)$$

Ova dva uslova odgovaraju zakonima očuvanja energije u trenutku tuneliranja t_0 i trenutku naknadnog rasijanja t .

Da bismo izveli analitički izraz za zakon odsijecanja, polazimo od sistema jednačina (4.31) i (4.32). Razmatramo linearno polarizovano lasersko polje sa vektorom električnog polja $\mathbf{E}(t)$ i odgovarajućim vektorskim potencijalom $\mathbf{A}(t) = A(t)\hat{\mathbf{e}}$, koji su definisani sa

$$\mathbf{E}(t) = E_0 \cos \omega t \hat{\mathbf{e}}, \quad \mathbf{A}(t) = -A_0 \sin \omega t \hat{\mathbf{e}}. \quad (4.33)$$

Elektroni sa maksimalnom kinetičkom energijom su elektroni emitovani u pravcu koji se podudara sa osom polarizacije polja [118]. Preciznije rečeno, ugao između jediničnog vektora polarizacije $\hat{\mathbf{e}}$ i konačnog impulsa detektovanog elektrona $\mathbf{p}$ je ili $\theta = 0^\circ$ ili $\theta = 180^\circ$. U tom slučaju, jednačine date sa (4.31) i (4.32) se svode na

$$[k_s + A(t_0)]^2 = -2I_P, \quad (4.34)$$

$$[k_s + A(t)]^2 = [p + s_\theta A(t)]^2, \quad (4.35)$$

gdje je, u skladu sa jednačinom (4.30),

$$k_s = \frac{A_0}{\omega \tau} (\cos \omega t_0 - \cos \omega t), \quad \tau = t - t_0, \quad (4.36)$$

dok je $s_\theta = \cos \theta = \pm 1$.

Želimo riješiti sistem jednačina (4.34), (4.35) i (4.36) po varijablama t_0 i t . Jednačina (4.34) daje

$$a \cos \psi - b \sin \psi = i s_1 \gamma, \quad (4.37)$$

gdje je $s_1 = \pm 1$ i

$$a = \sin \sigma, \quad b = \cos \sigma - \frac{\sin \sigma}{\sigma}. \quad (4.38)$$

U prethodnim izrazima σ i ψ su definisani sa

$$\sigma = \omega \tau / 2, \quad \psi = \omega(t_0 + t)/2. \quad (4.39)$$

Jednačina (4.37) može biti riješena po $\sin \psi$ sa sljedećim rezultatom

$$\sin \psi = \frac{-i s_1 \gamma b + s_2 a \sqrt{a^2 + b^2 + \gamma^2}}{a^2 + b^2}, \quad (4.40)$$

gdje je $s_2 = \pm 1$.

Rješenja jednačine (4.35) zadovoljavaju $k_s + A(t) = s_3[p + s_\theta A(t)]$, pri čemu je $s_3 = \pm 1$. Za $s_3 = s_\theta$ imamo $p = s_\theta k_s$ i ova rješenja ćemo odbaciti, pošto ona vode ka nižim maksimalnim vrijednostima kinetičke energije detektovanih elektrona. S druge strane, za $s_3 = -s_\theta$ imamo $p = -s_\theta[k_s + 2A(t)]$, što vodi ka

$$E_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/2 = 2U_P(c \sin \psi + 2a \cos \psi)^2, \quad (4.41)$$

gdje je c dato sa

$$c = 2 \cos \sigma - \frac{\sin \sigma}{\sigma}. \quad (4.42)$$

Iz jednačina (4.37) i (4.41) dobijemo

$$E_{\mathbf{p}} = 2U_P[(c + 2b) \sin \psi + 2is_1\gamma]^2, \quad (4.43)$$

gdje je $\sin \psi$ određeno izrazom (4.40). Uvodeći novi parametar sa

$$\delta = \gamma^2/(a^2 + b^2) \quad (4.44)$$

rezultat (4.41) može biti zabilježen na sljedeći način

$$E_{\mathbf{p}}(\tau) = 2U_P[f(\tau) + isg(\tau)], \quad (4.45)$$

gdje je $s = s_1 s_2 = \pm 1$ i

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \frac{1}{a^2 + b^2} \{a^2(c + 2b)^2 \\ &+ \delta[a^2(c + 2b)^2 - (2a^2 - bc)^2]\}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$g(\tau) = \frac{[\delta(1 + \delta)]^{1/2}}{a^2 + b^2} 2a(2b + c)(2a^2 - bc). \quad (4.47)$$

Konačno, maksimalna kinetička energija koja određuje zakon odsijecanja je data sa

$$E_{\mathbf{p},\max} = \max_{\tau} \operatorname{Re} E_{\mathbf{p}}(\tau) = \operatorname{Re} E_{\mathbf{p}}(\tau_{\max}). \quad (4.48)$$

Vrijednost $\tau_{\max}$ može biti određena rješavanjem sistema nelinearnih jednačina $dE_{\mathbf{p}}(\tau)/d\tau = 0$ i $\operatorname{Im} E_{\mathbf{p}}(\tau) = 0$ po $\tau = \tau_R + i\tau_I$, gdje su $\tau_R \equiv \operatorname{Re} \tau$ i $\tau_I \equiv \operatorname{Im} \tau$.

Sada želimo izvesti aproksimativno analitičko rješenje za $E_{\mathbf{p},\max}$. Vjerojatnoća jonizacije opada sa porastom vrijednosti τ_I . Stoga ćemo pretpostaviti da je $|\tau_I| \ll \tau_R$. Razvijajući $E_{\mathbf{p}}(\tau)$ u red po τ_I dobijemo

$$\begin{aligned} f(\tau) + isg(\tau) &= \exp\left(i\tau_I \frac{d}{d\tau_R}\right) [f(\tau_R) + isg(\tau_R)] \\ &= f(\tau_R) - \tau_I sg'(\tau_R) - \tau_I^2 f''(\tau_R)/2 \\ &\quad + i [sg(\tau_R) + \tau_I f'(\tau_R) - \tau_I^2 sg''(\tau_R)/2] + \mathcal{O}(\tau_I^3). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Iz uslova $\text{Im}[f(\tau) + isg(\tau)] = 0$ dobijemo $\tau_I \approx -sg(\tau_R)/f'(\tau_R)$, te koristeći ovu aproksimaciju imamo

$$\text{Re}(E_{\mathbf{p}}/U_P) = 2f(\tau_R) + [g^2(\tau_R)/f'(\tau_R)]'. \quad (4.50)$$

Rješavajući nelinearnu jednačinu $2f'(\tau_R) + [g^2(\tau_R)/f'(\tau_R)]'' = 0$ po τ_R i unoseći tako dobiveni rezultat u jednačinu (4.50) nalazimo aproksimativno rješenje za $E_{\mathbf{p},\max}$. Ovo ćemo rješenje koristiti za poređenje sa našim aproksimativnim analitičkim rješenjem.

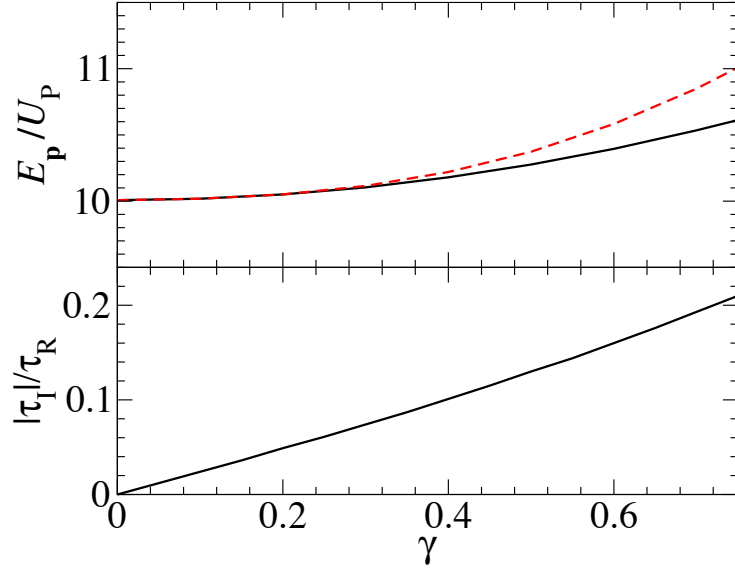
Gornji rezultat može biti dalje pojednostavljen. U graničnom slučaju prelaska na klasični zakon odsijecanja, zanemarujemo jonizacioni potencijal I_P u izrazu (4.45). Tada dobijemo sljedeću nelinearnu jednačinu koja određuje $E_{\mathbf{p},\max}$

$$\left(\frac{1}{\sigma} - \cot \sigma\right) \left(\frac{1}{2\sigma} - \cot \sigma\right) = 1, \quad (4.51)$$

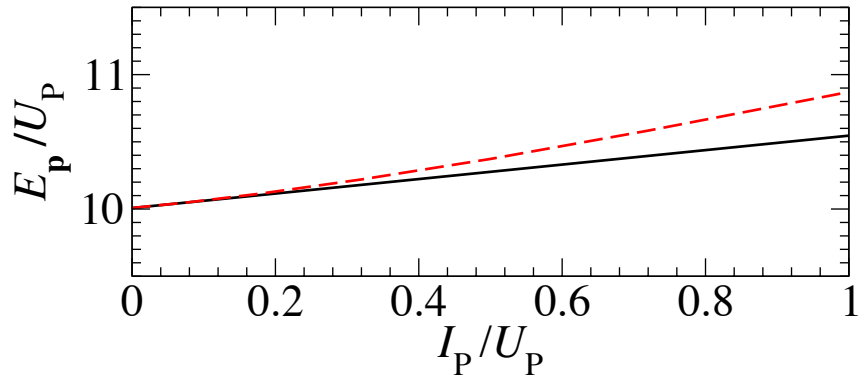
čije rješenje je $\sigma = 2.153$, tj. $\omega\tau = 4.306$ (vidjeti naprimjer [110]). Uvodeći ovo aproksimativno rješenje kao naše τ_R u jednačinu (4.50), dobijemo sljedeći jednostavan izraz za zakon odsijecanja [140]

$$E_{\mathbf{p},\max} = 10.007U_P + 0.538I_P. \quad (4.52)$$

Na taj način smo našli korekciju dobro poznatog klasičnog cutoffa za HATI proces, koji sada uključuje i zavisnost od I_P . Ovo je bio i glavni rezultat ovog poglavlja. Aproksimativni rezultat (4.52) je dobiven uz pretpostavku da je parametar $|\tau_I|/\tau_R$ mali. Za veće vrijednosti Keldyshevog parametra γ ova aproksimacija je nedostatna. Na slikama 4.2 i 4.3 je prikazana usporedba rezultata dobivenih pomoću (4.52) sa mnogo preciznijim rezultatom za $E_{\mathbf{p},\max}$, dobivenim rješavanjem jednačine $d(\text{Re } E_{\mathbf{p}})/d\tau = 0$. Sa slike 4.2 vidimo da je $|\tau_I| < 0.1\tau_R$ za $\gamma < 0.4$. Za $I_P < 0.5U_P$ aproksimativni rezultat za $E_{\mathbf{p},\max}$ se slaže jako dobro sa numeričkim rezultatom. Sa slike 4.3 vidimo da je razlika u rezultatu ova dva pristupa manja od 2% u intervalu $0.5U_P < I_P < 0.8U_P$.



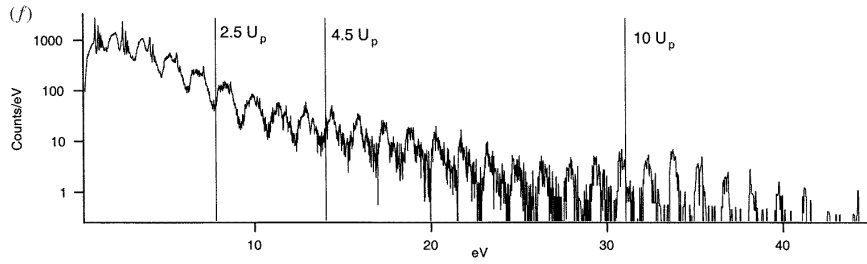
Slika 4.2: Gornji graf: aproksimativni zakon odsijecanja (4.52) (puna linija) i zakon odsijecanja dobiven numeričkim rješavanjem jednačine (4.50) (iscrtkana linija) kao funkcija Keldyshevog parametra γ . Donji graf: parametar $|\tau_I|/\tau_R$ kao funkcija Keldyshevog parametra.



Slika 4.3: Aproksimativno dobivena maksimalna vrijednost kinetičke energije elektrona, jednačina (4.52) (puna linija) i maksimalna kinetička energija dobivena numerički (iscrtkana linija) kao funkcije jonizacionog potencijala I_P (skaliranog po ponderomotornom potencijalu U_P).

Ne postoji veliki broj HATI eksperimenata sa dobrom energetsom rezolucijom, a koji bi mogli poslužiti pri poređenju dobivenog zakona odsi-

jecanja sa rezultatima dobivenim eksperimentalnim putem. U svrhu usporedbe, najpodesniji su rezultati eksperimenta, objavljeni u radu [116]. Na slici 4.4 smo prikazali dobiveni HATI spektar. U eksperimentu je korišten Ti:safir laser. Valna dužina laserskog zračenja je bila oko 800 nm, a vrijeme trajanja pulsa je bilo oko 110 fs. Intenzitet zračenja se kretao u intervalu od 10^{13} do 10^{14} W/cm². Metu su činili atomi ksenona. Rezolucija kinetičke energije detektovanih fotoelektrona je bila manja od 25 meV. Bez daljnjeg ulaženja u detalje koji su karakterisali izvedbu ovog eksperimenta, napomenimo da je spektar prikazan na slici 4.4 spektar integrisan po svim uglovima. Intenzitet laserskog polja je bio $5.2 \cdot 10^{13}$ W/cm², a odgovarajuća ponderomotorna energija 3.1 eV. Keldyshev parametar je u tom slučaju $\gamma = 1.4$. Poziciju cutoffa smo dobili pomjeranjem klasične granice za iznos $0.538I_P = 6.5$ eV, gdje je I_P jonizacioni potencijal atoma ksenona koji iznosi 12.13 eV. Kako možemo vidjeti sa slike, slaganje analitičkog izraza za zakon odsijecanja (4.52) i eksperimentalnih rezultata je jako dobro.



Slika 4.4: Spektar jonizacije iznad praga višeg reda, integrisan po svim uglovima. Intenzitet linearno polarizovanog polja je $I = 5.2 \cdot 10^{13}$ W/cm². Metu čine atomi ksenona. Vertikalnim linijama, s desna na lijevo, su naznačene vrijednosti kinetičke energije fotoelektrona, i to $2.5 U_P$, $4.5 U_P$ i $10 U_P$. Na klasičnu vrijednost cutoffa $10.007 U_P$ treba dodati vrijednost $0.538 U_P = 6.5$ eV. Kako se vidi sa slike, slaganje eksperimentalnih rezultata i novog zakona odsijecanja je jako dobro.

Poglavlje 5

Analiza jonizacije iznad praga višeg reda primjenom SPM

U ovom poglavlju ćemo detaljno predstaviti rezultate dobijene primjenom metode sedlaste tačke (eng. Saddle-Point Method, SPM). U prvom odjeljku ćemo prikazati primjenu ove metode na rješavanje podintegralnog matričnog elementa dobivenog uvrštavanjem (4.7) u (4.10). U drugom odjeljku izvrši ćemo klasifikaciju rješenja SPM metoda za proces jonizacije iznad praga višeg reda, te ujedno potvrditi opravdanost, u prethodnom poglavlju uvedene korekcije na zakon odsijecanja visokoenergetskog dijela HATI spektra. Potom ćemo navesti uniformnu aproksimaciju, jedan matematički rigorozniji aparat, koji ispravlja neke nedosljednosti prethodnog metoda. Na kraju ovog poglavlja ćemo razmatrati ponašanje rješenja sa promjenom ugla emisije fotoelektrona.

5.1 Primjena metode sedlaste tačke pri opisu procesa jonizacije iznad praga višeg reda

Uvrštavajući (4.7) u izraz (4.10), te zamjenjujući dva ravnopravna puta integracije, matrični element koji opisuje naknadno rasijane fotoelektrone ima oblik

$$M_{\mathbf{p}i}^{(1)} = - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t dt_0 \int d^3\mathbf{k} \exp[iS_{\mathbf{p}i}(t, t_0, \mathbf{k})] \times \langle \mathbf{p} + \mathbf{A}(t) | V(\mathbf{r}) | \mathbf{k} + \mathbf{A}(t) \rangle \langle \mathbf{k} + \mathbf{A}(t_0) | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t_0) | \psi_i \rangle, \quad (5.1)$$

gdje je $S_{\mathbf{p}i}$ akcija data sa (4.29). Integral po impulsu međustanja elektrona $\mathbf{k}$ može biti riješen metodom sedlaste tačke [46, 118]. Uslov stacionarnosti

$\nabla_{\mathbf{k}} S_{\mathbf{p}i}(t, t_0, \mathbf{k}) = \mathbf{0}$ je ispunjen kada je $\mathbf{k} = \mathbf{k}_s = -\int_{t_0}^t dt' \mathbf{A}(t')/(t - t_0)$. Ovaj rezultat je dobiven i u prethodnom poglavlju, i dat je izrazom (4.30). Matrični element (5.1), nakon primjene saddle-point metode, izložene u matematičkom dodatku, na trostruki integral po komponentama impulsa međustanja fotoelektrona poprima sljedeću formu

$$M_{\mathbf{p}i}^{(1)} = - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t dt_0 \left(\frac{2\pi}{i(t - t_0)} \right)^{3/2} \exp[iS_{\mathbf{p}i}(t, t_0, \mathbf{k}_s)] \times \langle \mathbf{p} + \mathbf{A}(t) | V(\mathbf{r}) | \mathbf{k} + \mathbf{A}(t) \rangle \langle \mathbf{k} + \mathbf{A}(t_0) | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t_0) | \psi_i \rangle |_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_s}. \quad (5.2)$$

Uslovi stacionarnosti akcije u odnosu na dvije preostale varijable integracije, vrijeme jonizacije t_0 i vrijeme povratka matičnom jonu t , vode ka relacijama datim sa (4.31) i (4.32). Fizikalno, ova dva uslova odgovaraju zakonima sačuvanja energije u trenutku jonizacije i trenutku naknadnog povratka, respektivno. Koristeći saddle-point metod možemo preostali dvostruki integral po t i t_0 u matričnom elementu (5.2) svesti na sumu koja ide po rješenjima $\{t_{0s}, t_s\}$ sistema (4.31) i (4.32). Uzimajući u obzir (4.28), te prelazeći sa varijable φ na t , odgovarajući T - matrični element koji opisuje naknadno rasijane elektrone u aproksimaciji sedlaste tačke ima sljedeći oblik

$$T_{\mathbf{p}i}^{(1)}(n) = \sum_s A_s e^{iS_s} = \omega \sum_s V_{\mathbf{k}_s-\mathbf{p}} \langle \mathbf{k}_s + \mathbf{A}(t_{0s}) | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t_{0s}) | \psi_i \rangle e^{iS_s} / \Delta_s^{1/2}, \quad (5.3)$$

gdje je $S_s \equiv S(t_{0s}, t_s)$ i $\Delta_s = \Delta(t_{0s}, t_s)$, dok je $S(t_0, t)$ dato sa

$$S(t_0, t) = E_{\mathbf{p}} t + p\alpha(t) \cos \theta + \frac{k_s^2}{2}(t - t_0) + (U_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{p}})t_0 + \mathcal{U}_1(t_0). \quad (5.4)$$

Ugao θ je ugao pod kojim je elektron emitovan u odnosu na osu koja se podudara sa polarizacijom laserskog polja, dok je $E_{\mathbf{p}} = n\omega - I_{\mathbf{p}} - U_{\mathbf{p}}$. Član $\Delta(t_0, t)$ koji se javlja u nazivniku izraza (5.3) je dat sa

$$\Delta(t_0, t) = \left[\frac{i(t - t_0)}{2\pi} \right]^3 \left[\left(\frac{\partial^2 S}{\partial t_0 \partial t} \right)^2 - \frac{\partial^2 S}{\partial t_0^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \right]. \quad (5.5)$$

U gornjem izrazu drugi mješoviti izvod po varijablama t_0 i t je

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t_0 \partial t} = - \frac{[k_s + A(t_0)][k_s + A(t)]}{(t - t_0)}, \quad (5.6)$$

dok je drugi član dat sa

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t_0^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{1}{(t - t_0)^2} \{ [k_s + A(t_0)][k_s + A(t_0) - (t - t_0)E(t_0)] \times \{ (t - t_0)E(t)[k_s - p \cos \theta] + [k_s + A(t)]^2 \}. \quad (5.7)$$

Upravo ovaj rezultat ćemo nazvati saddle-point aproksimacija (SPA) HATI procesa¹.

5.2 Klasifikacija rješenja dobivenih metodom sedlaste tačke

Za linearno polarizovano polje, sistem (4.31) i (4.32) može biti riješen slično onome kako je urađeno u slučaju procesa generacije viših harmonika u radu [51]. Rješenja $\{t_{0s}, t_s\}$ su karakterisana multiindeksom koji sadrži tri broja $s \equiv \alpha\beta m$.² Ova notacija je objašnjena na slici 5.1. Pri proračunu su korišteni sljedeći parametri laserskog polja: odgovarajući intenzitet je 10^{15} W/cm², dok je talasna dužina zračenja 760 nm. Meta su atomi helija, dok su elektroni emitovani u pravcu ose polarizacije polja.

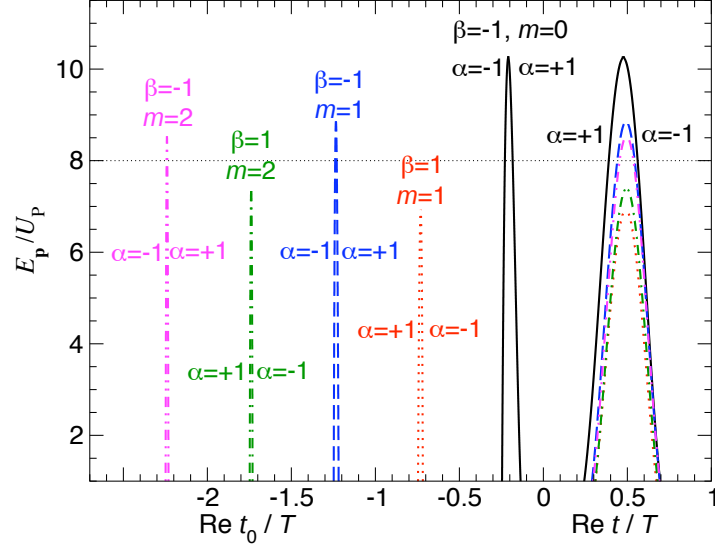
U razmatranju koje slijedi, ograničavamo se na vrijeme naknadnog rasi-
janja t koje se nalazi unutar jednog optičkog ciklusa laserskog polja $0 \leq \text{Re } t < T$. Za svako t imamo beskonačno mnogo parova rješenja, koja mogu biti poredana odgovarajućim poređenjem njihovih trenutaka jonizacije t_0 . Za $-(m + 1/2)T \leq \text{Re } t_0 < -(m - 1/2)T$, gdje je $m = 0, 1, 2, \dots$, postoje dva para rješenja. Par koji ima duže (kraće) vrijeme putovanja $\text{Re}(t - t_0)$ nosi sa sobom indeks $\beta = -1$ ($\beta = +1$). Svaki par se, opet, sastoji od dvije orbite sa neznatnom razlikom u vremenu putovanja, koje je već dobro poznato iz Lewensteinovog modela [29] primijenjenog u slučaju HHG-a. Kraću orbitu ćemo razlikovati od duže odgovarajućim indeksom α . Duža orbita je karakterisana sa $\alpha = +1$, a kraća sa $\alpha = -1$. Indeks m daje približnu dužinu trajanja vremena putovanja predstavljenog kao cjelobrojni umnožak perioda laserskog polja, $m = [(t - t_0)/T]$.³ Za $m = 0$ postoji samo jedan par rješenja, koja su karakterisana sa $\beta = -1$. Za sva druga rješenja imaginarni dio varijable $\varphi = \omega t$ je veoma mali, dok vrijednost realnog dijela leži u intervalu $[0, 2\pi]$.

U radu [51] nađena su aproksimativna analitička rješenja sistema saddle-

¹Korištenje prethodno izložene standardne metode sedlaste tačke u nekim slučajevima može dovesti do poteškoća. Naime, može se desiti da je podintegralni matrični element singularan pri specificiranim sedlastim tačkama. U tom slučaju je potrebno koristiti izmijenjenu proceduru saddle-point metode, poznatiju kao modifikovani metod sedlaste tačke. Takva procedura podrazumijeva primjenu modifikovane metode pri proračunu integrala po t_0 , a potom standardne metode na preostalu kvadraturu po t . U našem slučaju bi, primjenom pomenute procedure, $T^{(1)}(n)$ - matrični element bio proporcionalan sa $\sum_s (\partial^2 S_s / \partial t_0^2)^{-1} (2\pi i / (\partial^2 S_s / \partial t^2))^{1/2} \exp(iS_s)$. Za detaljniji opis modifikovane metode sedlaste tačke pogledati rad [147].

²Slična klasifikacija je iznešena u radu [72].

³Simbol $[x]$ predstavlja najveći cijeli broj manji od x .



Slika 5.1: Notacija $\alpha\beta m$ koja je korištena za označavanje rješenja sistema jednačina za sedlaste tačke. Puna, tačkasta, duga iscrtkana, tačkasto iscrtkana i dvije tačke-crta kriva u desnom dijelu slike specificiraju trenutke naknadnog rasijanja za pet parova orbita sa najkraćim vremenom putovanja. U lijevom dijelu slike su odgovarajuće krive koje su povezane sa trenutkom jonizacije. Kinetičke energije emitovanih elektrona, skalirane po ponderomotornom potencijalu U_P , su nanese na ordinatu. Horizontalna linija, povučena pri konstantnoj energiji elektrona, povezuje trenutke jonizacije i trenutke naknadnog rasijanja za odgovarajuće orbite. Postoji jako mnogo drugih rješenja povezanih sa trenucima jonizacije t_0 koja bi se nalazila lijevo od margine slike. Njihova maksimalna kinetička energija konvergira ka $8U_P$. Krive su proračunate za slučaj atoma helija. Lasersko polje je linearno polarizovano intenziteta 10^{15} W/cm^2 i talasne dužine 760 nm. Emisija elektrona je pravcu $\theta = 0^\circ$.

point jednačina za proces generacije viših harmonika. Ova rješenja su dobivena pod pretpostavkom da je stacionarni impuls mali, što je zaista i tačno za duža vremena putovanja $\text{Re}(t - t_0)$. Slična procedura može biti urađena i za HATI. To ćemo, upravo, uraditi u ovom odjeljku. U tu svrhu pretpostavimo da imamo linearno polarizovano polje opisano vektorskim potencijalom

$$A(t) = A_0 \cos \omega t. \quad (5.8)$$

Osim toga, uvedimo nove varijable: $\varphi_0 = \omega t_0$, $\varphi = \omega t$, $q = p/A_0$ i $k = k_s/A_0$. U ovoj notaciji sistem (4.31) i (4.32) se svodi na

$$(k + \cos \varphi_0)^2 + \gamma^2 = 0, \quad (5.9)$$

$$q^2 = 2(k - q \cos \theta) \cos \varphi + k^2. \quad (5.10)$$

Skalirani stacionarni impuls je u ovom slučaju dat sa

$$k = (\sin \varphi_0 - \sin \varphi) / (\varphi - \varphi_0). \quad (5.11)$$

U jednačini (5.9) $\gamma = \sqrt{I_P / (2U_P)}$ je Keldyshev parametar [120], dok je u jednačini (5.10) sa θ označen ugao između impulsa emitovanog elektrona i ose koja se poklapa sa osom polarizacije laserskog polja. Rješenje jednačine (5.10) po varijabli φ je dato sa

$$\varphi = (1 - \alpha)\pi + \alpha \arccos \left(\frac{q^2 - k^2}{2k - 2q \cos \theta} \right), \quad \alpha = \pm 1, \quad (5.12)$$

što opravdava uvođenje indeksa α .⁴ Rješenje po φ_0 je isto kao u slučaju generacije viših harmonika

$$\varphi_0 = \beta \left(\frac{\pi}{2} + \frac{k}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \right) + 2m\pi + i \operatorname{arcsinh} \gamma, \quad \beta = \pm 1, \quad (5.13)$$

čime objašnjavamo uvođenje indeksa β i indeksa m : $m = 1, 2, \dots$ za $\beta = +1$, i $m = 0, 1, 2, \dots$ za $\beta = -1$. Stavljajući $k^{(0)} = 0$ u jednačine (5.12) i (5.13), dobijamo odgovarajuće aproksimacije nultog reda za varijable φ i φ_0 , koje ćemo označiti sa $\varphi^{(0)}$ i $\varphi_0^{(0)}$, respektivno. Uvrštavajući sada ova rješenja u izraz za k , tj. u jednačinu (5.11), dobićemo aproksimaciju prvog reda za k najnižeg reda po veličini $1/(2m\pi)$ u sljedećem obliku

$$k^{(1)} = \frac{1}{2m\pi} \left[\beta \sqrt{1 + \gamma^2} - \alpha \sqrt{1 - \frac{q^2}{4 \cos^2 \theta}} \right], \quad (5.14)$$

pri čemu smo koristili relacije

$$\sin \varphi_0^{(0)} = \beta \sqrt{1 + \gamma^2}, \quad (5.15)$$

odnosno

$$\sin \varphi^{(0)} = \alpha \sin \{ \arccos [-q / (2 \cos \theta)] \} = \alpha \sqrt{1 - q^2 / (4 \cos^2 \theta)}. \quad (5.16)$$

Naglasimo da posljednji izraz vrijedi pod uslovom da je ispunjeno $q^2 < 4 \cos^2 \theta$. Odgovarajuće aproksimacije prvog reda za varijable φ_0 i φ ćemo dobiti, ako $k^{(1)}$ uvrstimo u jednačinu

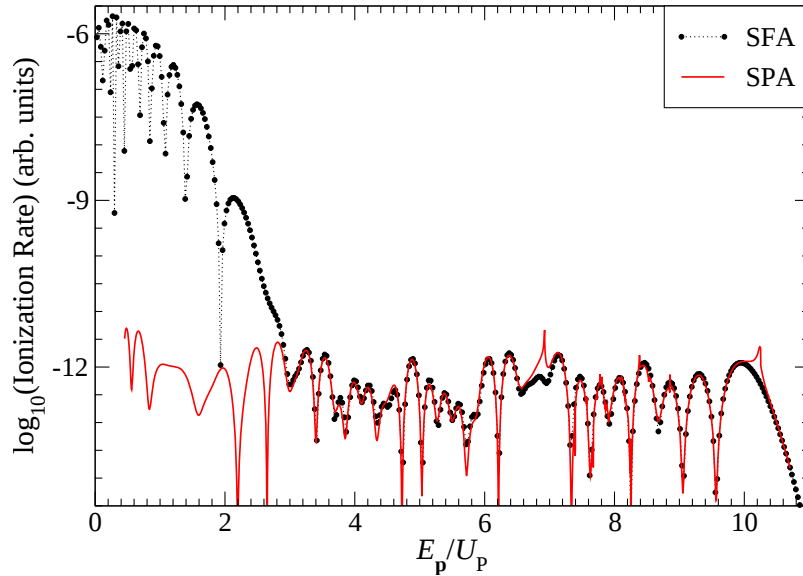
$$\varphi_0^{(1)} = \varphi_0^{(0)} + \frac{\beta k^{(1)}}{\sqrt{1 + \gamma^2}}, \quad (5.17)$$

⁴Za razliku od slučaja generacije viših harmonika, gdje su dva skupa rješenja $\{\varphi_0, \varphi\}$ i $\{\varphi_0 + \alpha\pi, \varphi + \alpha\pi\}$ vodila ka emisiji samo neparnih harmonika [51], u našem slučaju jonizacije iznad praga višeg reda imamo samo jedan skup rješenja.

pri određivanju prve aproksimacije varijable φ_0 , odnosno u jednačinu

$$\varphi^{(1)} = \varphi^{(0)} + \frac{\alpha k^{(1)}}{2 \cos^2 \theta \sqrt{1 - \left(\frac{q}{2 \cos \theta}\right)^2}}, \quad (5.18)$$

pri određivanju prve aproksimacije varijable φ . Koristeći upravo ova aproksimativna rješenja kao polazna rješenja, saddle-point rješenja po φ_0 i φ mogu biti nađena rješavajući sistem saddle-point jednačina numeričkim putem. Na slici 5.1 su predstavljena rješenja koja smo dobili upravo takvim numeričkim proračunom. Kao što vidimo, maksimalna kinetička energija elektrona je data sa $10.25 U_P$. To je u saglasnosti sa zakonom odsijecanja (4.52). Naime, u našem slučaju je Keldyshev parametar $\gamma = 0.48$, tj. $I_P/(2U_P) = 0.228$. Uvrštavajući ovaj podatak u izraz (4.52) dobijemo za maksimalnu kinetičku energiju elektrona $10.25 U_P$. Bitno je napomenuti da će ova aproksimativna analitička rješenja biti polazna osnova u petom odjeljku narednog poglavlja pri razmatranju pojave pojačanja dijela HATI spektra.



Slika 5.2: Diferencijalna brzina jonizacije za atom He kao funkcija kinetičke energije elektrona E_P koja je izražena preko ponderomotornog potencijala U_P . Emisija elektrona je u pravcu $\theta = 0^\circ$. Lasersko polje je linearno polarizovano, intenziteta 10^{15} W/cm^2 i talasne dužine 760 nm. Rezultati dobiveni numeričkom integracijom SFA (tačkaste linije sa kružićima) su poređeni sa rezultatima dobivenim korištenjem SPM aproksimacije (SPA; puna linija).

Na kraju ovog odjeljka uporedimo rezultate koje dobijemo koristeći metod sedlaste tačke sa rezultatima dobivenim numeričkom integracijom, a koja je

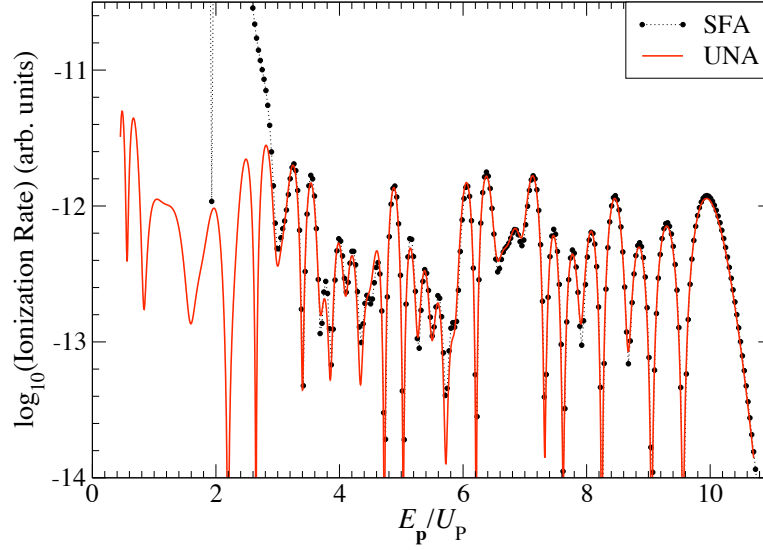
izvedena na osnovu teorije iznešene u prvom odjeljku prethodnog poglavlja. Na slici 5.2 je predstavljena takva usporedba za atom helija. Primjer je izabran jer je struktura jakih oscilacija u spektru HATI elektrona dobro izražena, tako da ovaj primjer može poslužiti kao dobar test za rezultate dobivene SPM aproksimacijom. Kako možemo zaključiti sa slike 5.2, dio spektra koji potiče od naknadno rasijanih elektrona ($E_p > 3U_p$)⁵ dobiven aproksimacijom jakog polja se jako dobro slaže sa onim dobivenim SPM aproksimacijom.

5.3 Uniformna aproksimacija

Poznato je da metod sedlaste tačke ne daje zadovoljavajuće rezultate u dijelu spektra neposredno prije i nakon cutoffa [118]. Na primjer, za energije elektrona iza krajnjeg cutoffa, ovaj problem je riješen na taj način da se zanemari nefizikalno rješenje iz odgovarajućeg para saddle-point rješenja. Iz para rješenja treba izbaciti ono rješenje, koje smo karakterisali indeksom $\alpha = -1$, tj. ono rješenje sa neznatno kraćim vremenom leta u odnosu na ono koje smo označili sa $\alpha = +1$. Međutim, u ovom slučaju mali dio spektra oko cutoffa nije adekvatno opisan metodom sedlaste tačke. Ovo se na spektru očituje malim šiljcima koji se upravo javljaju pri cutoffovima odgovarajućih parova orbita, što se jasno vidi sa slike 5.2. Prisjetimo se da se SPM aproksimacija sastojala u tome da, prije svega, na osnovu stacionarnosti akcije (4.29) u odnosu na pet varijabli, svedemo podintegralni matrični element (5.1) na odgovarajuću sumu. Ova aproksimacija, odnosno razvoj akcije vrijedi u određenoj oblasti oko sedlaste tačke u kojoj integrand ima manju vrijednost od one u samoj sedlastoj tački, a da se pri tome integracija može protezati u intervalu $(-\infty, \infty)$. Aproksimacija sedlaste tačke pada upravo u onom trenutku kada razlika akcija $|S_i - S_j|$ dviju kvantnih orbita, sa približnim vrijednostima koordinata, postaje reda veličine jedinice, te tako razvoj akcije oko sedlaste tačke i postaje neadekvatan i neopravdano blizak razvoju oko susjedne tačke j i obratno.

Za kvantne orbite u HATI procesu ovo se upravo dešava kada energije elektrona dosegnu područje odgovarajućeg cutoffa. Teorija asimptotskog razvoja specifične grupe integrala tipa (B.1) nudi mnogo bolji i matematički rigorozniji način rješavanja ovog problema. Takav način je sadržan u metodi uniformne aproksimacije, koji se primjenjuje u slučaju dviju veoma bliskih

⁵Direktni dio spektra, također, može biti dobiven SPM aproksimacijom, kako je i naznačeno u trećem poglavlju ovog rada. Kako nas interesuje visokoenergetski dio spektra, to smo razmatranje dijela spektra koji potiče od direktnih elektrona, dobiven SPM aproksimacijom, trenutno zanemarili.



Slika 5.3: Poređenje rezultata dobivenih pomoću uniformne aproksimacije sa onim koji su dobiveni korištenjem numeričke integracije. Laserski i atomski parametri su isti kao na slici 5.2.

sedlastih tačaka. Sada imamo razvoj akcije u blizini, kako jedne, tako i druge sedlaste tačke, koji uključuje više redove, te kao rezultat imamo zajednički doprinos obiju sedlastih tačaka. Metod je veoma uspješno primjenjivan pri opisu različitih atomskih procesa u jakom laserskom polju [28, 51, 134]. T -matrični element (5.3) je u uniformnoj aproksimaciji predstavljen sljedećim izrazom

$$T_{\mathbf{p}i}^{(1)}(n) = \sum_{\alpha\beta m} A_{\alpha\beta m} \exp(iS_{\alpha\beta m})$$

$$= \sum_{\beta m} (6\pi S_-)^{1/2} \exp(iS_+ + i\pi/4) [z^{-1/2} A_- \text{Ai}(-z) + iz^{-1} A_+ \text{Ai}'(-z)], \quad (5.19)$$

gdje su Ai i Ai' , Airyjeva funkcija i njen prvi izvod, respektivno, dok je $z = (3S_-/2)^{2/3}$. Veličine $A_{\pm}$ i $S_{\pm}$ su povezane sa faktorom ispred eksponencijalnog dijela u (5.3) i akcijom u sedlastim tačkama (5.4), i date su sa

$$A_{\pm} = \frac{A_{1\beta m} \pm A_{-1\beta m}}{2}, \quad (5.20)$$

odnosno sa

$$S_{\pm} = \frac{S_{1\beta m} \pm S_{-1\beta m}}{2}. \quad (5.21)$$

U jednačini (5.19) iza pozicije cutoffa argument z mora biti zamijenjen sa $z \exp(i2\beta\pi/3)$ da bi time izabrali pravilnu granu Airyjevih funkcija. Također, $A_{\alpha\beta m}$ iza pozicije cutoffa mora promijeniti znak.

Na slici 5.3 smo napravili poređenje rezultata dobivenih koristeći uniformnu aproksimaciju sa onim koje smo dobili uz pomoć numeričke integracije. Kao meta je izabran helij, a parametri laserskog polja su isti kao na prethodne dvije slike. Slaganje rezultata dobivenih pomoću pomenute tri metode je izvrсна.

5.4 Ponašanje rješenja sa promjenom ugla

U trećem odjeljku prethodnog poglavlja izveli smo semiklasični izraz za zakon odsijecanja koji je dat sa (4.52). Ovaj zakon odsijecanja je izveden za $\theta = 0^\circ$ i $\theta = 180^\circ$. Za sve ostale vrijednosti uglova θ cutoff je niži, tj. plato koji odgovara naknadnom rasijanju je kraći. Za proizvoljan ugao emisije θ , rješavajući sistem (4.31) i (4.32) možemo dobiti relaciju za maksimalnu kinetičku energiju elektrona kao funkciju vremena leta τ [146]

$$E_{p,\theta}(\tau) = 2U_P \text{Re}(l^2 \cos 2\theta + d^2 + 2s_\theta l h \cos \theta), \quad s_\theta = \pm 1. \quad (5.22)$$

Funkcije l , d , d_1 i h su funkcije vremena τ i date su sa sljedećim izrazima

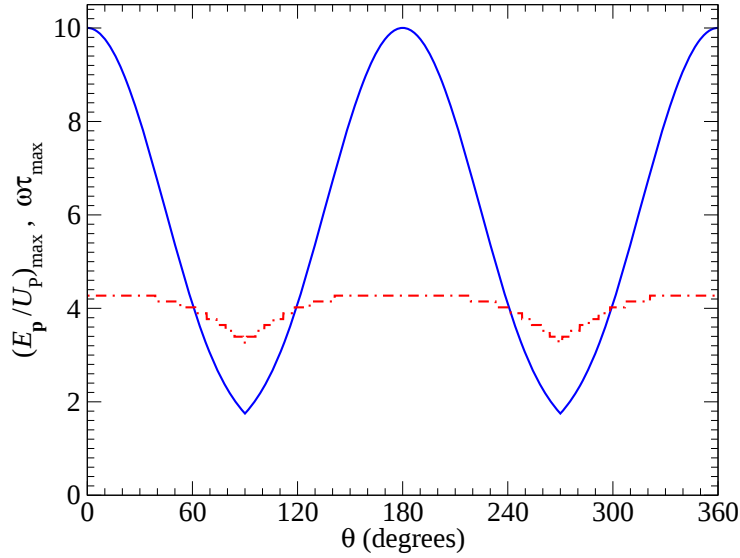
$$\begin{aligned} h^2 &= d^2 - l^2 \sin^2 \theta, \\ d^2 &= 2(b^2 - a^2)d_1^2 + \gamma^2 + 2a^2, \\ l &= -cd_1 + i\gamma, \\ \gamma^2 &= \frac{I_P}{2U_P}, \\ d_1 &= \frac{i\gamma b + s\sqrt{a^2(a^2 + b^2 + \gamma^2)}}{a^2 + b^2}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

U posljednjem izrazu je $s = \pm 1$, dok su a , b , σ i c dati sa (4.38), (4.39) i (4.42), respektivno. Pošto je $\cos(\pi \pm \theta) = -\cos \theta$, $\sin(\pi \pm \theta) = \mp \sin \theta$ i kako je $s_\theta = \pm 1$ to slijedi da je

$$E_{p,\theta|s_\theta=\pm 1} = E_{p,\pi\pm\theta|s_\theta=\mp 1}, \quad (5.24)$$

tako da je prilikom pronalaženja maksimalne kinetičke energije $(E_{p,\theta})_{\max}$ dovoljno to vršiti u intervalu $\theta \in [0, \pi/2]$. U graničnom slučaju $\gamma \rightarrow 0$, tj. u slučaju prijelaza na klasični slučaj, jednačina (5.22) postaje

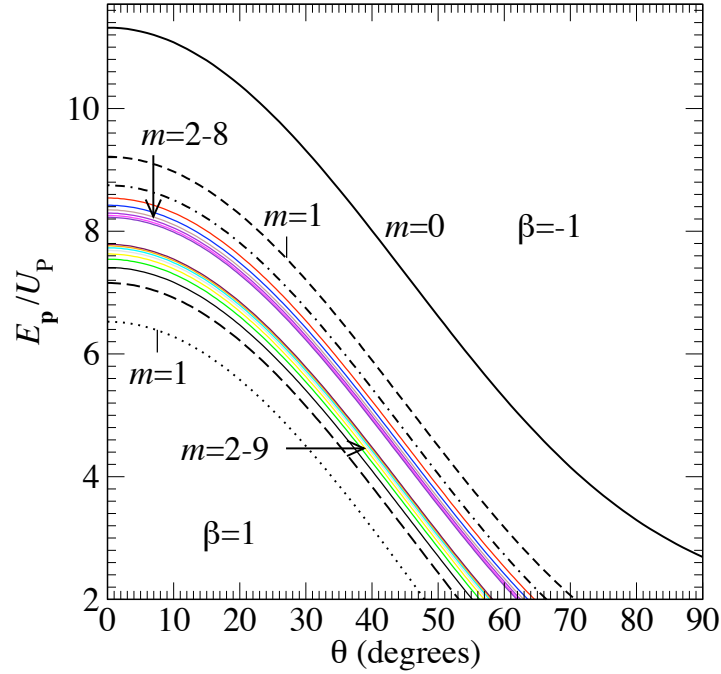
$$E_{p,\theta}(\tau) = \frac{2a^2 U_P}{a^2 + b^2} \left[c^2 \cos^2 2\theta + 4b^2 \pm 2c \cos \theta \sqrt{4b^2 - c^2 \sin^2 \theta} \right]. \quad (5.25)$$



Slika 5.4: Maksimalna, klasično dopuštena, kinetička energija elektrona (puna linija) i odgovarajuće vrijeme putovanja elektrona (kriva tačka-crta), kao funkcije ugla između emitovanog elektrona i pravca linearno polarizovanog polja. Rezultati su dobiveni korištenjem jednačine (5.25).

Na slici 5.4 je prikazana zavisnost maksimalne kinetičke energije HATI elektrona skalirane po U_P $(E_{p,\theta}/U_P)_{\max}$ (puna linija), kao i odgovarajuće vrijednosti vremena putovanja τ (tačkasto-iscrtkana linija), oboje kao funkcija ugla θ , jasno, dobivene korištenjem jednačine (5.25). Sa slike vidimo prethodno diskutovanu simetriju $\theta \leftrightarrow \pi \pm \theta$. U narednom poglavlju ćemo pokazati da je zavisnost $E_{p,\max}$ od ugla θ , dobijena primjenom metode sedlaste tačke, koja je predstavljena na slici 5.4, u saglasnosti sa rezultatima koji su dobijeni numeričkom integracijom (slika 6.1).

U trećem odjeljku ovog poglavlja uveli smo odgovarajuću klasifikaciju kvantnih orbita. Svaki par orbita βm karakterisan je svojim vlastitim zakonom odsijecanja, tj. cutoffom. Cilj nam je pogledati kako se ponašaju ovi zakoni odsijecanja u zavisnosti od ugla θ . Nedavno je izvršen eksperiment [148] u kojemu je uočena bogatija struktura HATI spektra koja potiče od efekata interferencije. Takve strukture su zapažene pri određenim vrijednostima ugla $\theta = 30^\circ$ i $\theta = 60^\circ$. Ako bi cutoff tačno određenog para orbita pokazivao različito ponašanje u odnosu na promjenu ugla θ (na primjer, presijecanja krivih $(E_{p,\theta})_{\max}$ za različite βm), onda bi takvo ponašanje moglo voditi ka objašnjenju već pomenutih eksperimentalnih rezultata. Razlog je taj, da doprinosi svih ovih orbita interferiraju (pogledati jednačine (5.3) i (5.19)). Na slici 5.5 je predstavljena ugaona zavisnost zakona odsi-



Slika 5.5: Pozicija cutoffa koju daju rješenja saddle-point jednačina, koja su karakterisana sa βm , kao funkcija ugla θ . Krive su proračunate za slučaj atoma ksenona. Lasersko polje je linearno polarizovano, intenziteta $8 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$ i talasne dužine 760 nm.

jecanja za različite parove orbita βm , u slučaju atoma ksenona, te linearno polarizovanog laserskog polja koje ima intenzitet $8 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$ i talasnu dužinu 760 nm. Postoje dvije grupe orbita: pozicije cutoffova orbita koje imaju $\beta = -1$, sa povećanjem indeksa m , dostižu fiksnu, ugaono zavisnu, vrijednost cutoffa odozgo, dok one orbite karakterisane sa $\beta = 1$ dostižu istu vrijednost odozdo. Za $\theta = 0^\circ$ maksimalna vrijednost kinetičke energije detektovanog HATI elektrona je za $\beta m = -10$ data sa $(E_{p,\theta=0^\circ})_{\max} = 11.32U_P$, što je približno jednako rezultatu dobivenom pomoću semiklasičnog zakona odsijecanja (4.52): $10.007U_P + 0.538I_P = 11.5U_P$. Odstupanje je manje od 2%. Minimalna vrijednost kinetičke energije elektrona je za $\beta m = 11$ i iznosi $(E_{p,\theta=0^\circ})_{\min} = 6.526U_P$. Za obje grupe orbita, kako onih karakterisanih sa $\beta = -1$, tako i onih karakterisanih sa $\beta = 1$, energija $E_{p,\theta=0^\circ} \rightarrow 8U_P$ sa povećanjem vrijednosti indeksa m . Ovakav rezultat je u skladu sa zakonom odsijecanja za elektron-atomsko rasijanje u jakom laserskom polju $E_{\mathbf{p}_f} = E_{\mathbf{p}_i} + 8U_P \pm 4\sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}U_P}$, koji je prezentovan u radu [24] i u skladu sa činjenicom da je za duge orbite (velike vrijednosti indeksa m) početna kinetička energija $E_{\mathbf{p}_i}$ mala. Pozicije cutoffova za sva druga rješenja ponašaju

se na isti način sa porastom ugla θ : Odgovarajuća maksimalna kinetička energija HATI elektrona polako opada ka nižim vrijednostima, dok konačno za ugao $\theta = 90^\circ$ ne dostigne vrijednost neznatno nižu od $2U_P$. Na kraju recimo da, kako nema presijecanja krivih na slici to, jasno, takvo ponašanje ne može prouzrokovati interferentnu strukturu pri određenim uglovima, a koja je opažena u gore pomenutom eksperimentu [148].

Poglavlje 6

SFA simulacija eksperimenata i pojačanje HATI spektra

Kako smo već vidjeli, spektar jonizacije iznad praga višeg reda se sastoji od dva dijela. Prvi dio koji potiče od direktnih elektrona ima cutoff oko $2U_P$. Široki plato koji slijedi nakon prvog platoa i koji je niži od prvog, završava naglim padom iznad $10U_P$. Ove osnovne karakteristike spektra se mogu objasniti i pomoću klasične teorije.

Međutim, drugi plato pokazuje bogatiju strukturu, koja ima pozadinu u odgovarajućim kvantno-mehaničkim efektima. Eksperimenti izvršeni krajem devedesetih godina prošlog vijeka [149, 150], kao i teorijski proračuni [151, 152] neposredno nakon njih, su pokazali povremeno pojačavanje dijela pikova platoa, koji se dešavaju pri promjeni intenziteta laserskog zračenja za samo par procenata.

Osim simulacije nedavno izvedenih eksperimenata [148] čije rezultate ćemo predstaviti u prva dva odjeljka, glavni dio ovog poglavlja je, upravo, posvećen novim rezultatima vezanim za pojačavanje dijelova visokoenergetskog HATI spektra. Dosadašnja istraživanja su vodila ka zaključku da se takva pojačanja odigravaju, tj. da su izraženija pri zatvaranju parnih kanala [72, 153]. Međutim, upravo u odjeljcima koji slijede izniječemo teoriju i odgovarajuće rezultate koji pokazuju da se pojačanja mogu odigrati i pri zatvaranju neparnih kanala. Kako ćemo vidjeti, to zavisi od orbitalnog ugaonog momenta vezanog elektrona podvrgnutog laserskom zračenju. Slični rezultati, dobiveni posve drugačijim razmatranjima, su nedavno publicirani u radovima [154, 155]. U trećem i četvrtom odjeljku dovodimo u vezu ponderomotornu energiju laserskog polja i sam proces zatvaranja kanala, odnosno efekat pojačavanja dijela HATI spektra. U petom odjeljku iznosimo već pomenutu teoriju kvantnih orbita koja uključuje analitičku analizu pomenutog fenomena i konačno u posljednjem odjeljku ovoga poglavlja govorimo o

uticaju efekta na fokalno usrednjeni spektar.

6.1 Fokalno usrednjeni spektar

U svrhu detaljne usporedbe sa eksperimentalnim podacima, energetski spektar jonizovanih elektrona mora biti usrednjen po prostorno-vremenskoj raspodjeli intenziteta u fokusu laserskog polja. Kao što nam je poznato, pri fiksnoj vrijednosti intenziteta laserskog polja I i frekvencije ω , odgovarajući spektar HATI elektrona se sastoji od niza diskretnih pikova, analogno relaciji (3.41) kod direktnih elektrona, pri energijama

$$E_{\mathbf{p}} = n\omega - U_P - I_P, \quad (6.1)$$

gdje je $n = n_{\min}, n_{\min} + 1, \dots$, dok je I_P jonizacioni potencijal, a $U_P = I/(4\omega^2)$ ponderomotorni potencijal laserskog polja. Minimalan broj apsorbovanih fotona neophodan za jonizaciju nakon zatvaranja određenog kanala, $n_{\min}$, je definisan sa

$$n_{\min} = \left\lceil \frac{I_P + U_P}{\omega} \right\rceil + 1. \quad (6.2)$$

Dakle, cilj nam je predstaviti i razmotriti rezultate računa fokalnog usrednjavanja. Usrednjavanjem po prostorno-vremenskoj raspodjeli intenziteta u fokusu laserskog polja dobićemo kontinuiran spektar ¹. Naravno, postoje dodatni fizikalni razlozi zbog kojih imamo kontinualne karakteristike spektra. Na primjer, jedan od njih je i konačna dužina laserskog pulsa. U narednom odjeljku ćemo pri simulaciji eksperimenta [148] koristiti izraz za slabo fokusiranje, oslanjajući se na činjenicu da je dijametar atomskog snopa u pomenutom eksperimentu mali u poređenju sa Rayleighevim opsegom laserskog snopa u fokusu. Radi kompletnosti izvešćemo i izraz za jako fokusiranje, koje je adekvatno u obrnutom slučaju.

Neka $R(I) \equiv dN/(d^3r dt)$ označava broj elektrona oslobođenih u jedinici zapremine i jedinici vremena pri konstantnom intenzitetu polja I . Dalje, pretpostavimo da je prostorna raspodjela intenziteta u fokusu Gaussova [153], tj. da vrijedi

$$I(\rho, z) = I_0 \left(\frac{w_0}{w(z)} \right)^2 \exp \left(-\frac{2\rho^2}{w(z)^2} \right), \quad (6.3)$$

¹Ovaj iskaz ne vrijedi u slučaju toliko dugih pulseva da elektroni mogu pobjeći bočno od pravca prostiranja pulsa [153].

gdje je

$$w(z) = w_0 \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.4)$$

U prethodnoj jednačini w_0 predstavlja radijus fokusa u struku, dok je $z_0 = w_0^2 \pi / \lambda$ Rayleighov opseg. Izraz za $w(z)$ pokazuje kako širina snopa raste sa povećanjem udaljenosti od centra fokusa z , i vidi se da je ona skoro konstantna za udaljenosti $z \leq \frac{1}{2} z_0$. Rayleighov opseg z_0 je, dakle, razdaljina duž koje je laserski snop efektivno kolimiran. Stopa jonizovanih elektrona unutar zapremine fokusa je data sa

$$\frac{dN}{dt} = \int d^3r R(I(\rho, z)). \quad (6.5)$$

Cilj je dobiti izraz koji odgovara jakom fokusiranju. Da bismo dobili formu pogodniju za računanje uvodimo integral po intenzitetu uz pomoć delta funkcije. U tom slučaju, koristeći prethodne tri jednačine, možemo pisati

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \int d^3r \int_0^{I_0} dI R(I) \\ &\times \delta \left\{ I - \frac{I_0}{1 + z^2/z_0^2} \exp \left[-\frac{2\rho^2}{w_0^2 (1 + z^2/z_0^2)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Sada pređimo na sferne koordinate (ρ, φ, z) . Uzimajući u obzir da je $dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz$, te uvodeći smjenu varijabli $z/z_0 = z'$, $\rho/w_0 = \rho'$ izraz (6.6) poprima sljedeći oblik

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= 2\pi w_0^2 z_0 \int_0^{I_0} dI \int_0^\infty \rho' d\rho' \int_{-\sqrt{\frac{I_0}{I}-1}}^{\sqrt{\frac{I_0}{I}-1}} dz' R(I) \\ &\times \delta \left\{ I - \frac{I_0}{1 + z'^2} \exp \left[-\frac{2\rho'^2}{1 + z'^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Kako je

$$\frac{\partial}{\partial \rho'^2} \left[I - I_0 (1 + z'^2)^{-1} \exp \left(-2\rho'^2 (1 + z'^2)^{-1} \right) \right] = 2I (1 + z'^2)^{-1}, \quad (6.8)$$

te s obzirom na argument delta funkcije u izrazu (6.7), koristeći osobinu iste, (6.7) poprima sljedeći oblik

$$\frac{dN}{dt} = \pi w_0^2 z_0 \int_0^{I_0} \frac{dI}{I} R(I) \int_0^{\sqrt{\frac{I_0}{I}-1}} (1 + z'^2) dz'. \quad (6.9)$$

Napokon, vršeći integraciju po varijabli z' , i sređujući izraz dobijemo

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{3}\pi w_0^2 z_0 \int_0^{I_0} \frac{dI}{I^{5/2}} \sqrt{I_0 - I} (2I + I_0) R(I). \quad (6.10)$$

Ako bi željeli izvršiti usrednjavanje za kraće pulseve, tada je neophodno, pored prostorne, uključiti i vremensku raspodjelu intenziteta laserskog polja. Dakle, sada je $I = I(\rho, z, t)$, pa je broj oslobođenih elektrona unutar zapremine interakcije V i u vremenskom intervalu τ , dat sa

$$N = \int_V d^3r \int_\tau dt R[I(\rho, z, t)]. \quad (6.11)$$

Ponovo pretpostavimo da imamo Gaussovu vremensko-prostornu raspodjelu intenziteta u fokusu laserskog polja [153]

$$I(\rho, z, t) = I_0 \left(\frac{w_0}{w(z)} \right)^2 \exp \left[-\frac{2\rho^2}{w(z)^2} - \frac{(t - \frac{z}{c})^2}{\tau^2} \right], \quad (6.12)$$

gdje su veličine $w(z)$, w_0 i z_0 definisane nakon izraza (6.4). Sa τ smo označili dužinu trajanja laserskog pulsa. Slično kao i kod jakog fokusiranja, prvo prelazimo na integral po intenzitetu preko delta funkcije, potom uvodimo sferne koordinate, te smjenu $z/z_0 = z'$, $\rho/w_0 = \rho'$ i $(t - \frac{z}{c})/\tau = t'$, nakon čega izraz (6.11) poprima sljedeći oblik

$$\begin{aligned} N = 2\pi z_0 w_0^2 \tau \int_0^{I_0} dI \int_{-\sqrt{\frac{I_0}{I}-1}}^{\sqrt{\frac{I_0}{I}-1}} dz' \int_0^\infty \rho' d\rho' \int_{-\infty}^\infty dt R(I) \\ \times \delta \left[I - I_0(1 + z'^2)^{-1} \exp \left(-\frac{2\rho'^2}{1 + z'^2} - t'^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Izraz (6.13) se može pojednostaviti ako se uvede smjena

$$\frac{\sqrt{2}\rho'}{\sqrt{1 + z'^2}} = r \cos \varphi, \quad t' = r \sin \varphi, \quad (6.14)$$

koja vodi na izraz

$$\begin{aligned} N = 2\pi z_0 w_0^2 \tau \int_0^{I_0} dI \int_{-\sqrt{\frac{I_0}{I}-1}}^{\sqrt{\frac{I_0}{I}-1}} dz' \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^\infty dr \\ \times \frac{1 + z'^2}{2} r^2 \cos \varphi R(I) \delta \left[I - I_0(1 + z'^2)^{-1} \exp(-r^2) \right]. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Kako je

$$\frac{\partial}{\partial r^2} \left[I - I_0(1 + z'^2)^{-1} \exp(-r^2) \right] = I_0(1 + z'^2)^{-1} \exp(-r^2) = I, \quad (6.16)$$

i, s obzirom na argument delta funkcije u (6.15), $r = (\ln \{I_0/[I(1 + z'^2)]\})^{1/2}$, integral u (6.15) se, nakon integracije po φ , može preurediti u

$$N = 4\pi z_0 w_0^2 \tau \int_0^{I_0} \frac{dI}{I} R(I) \int_0^{\sqrt{\frac{I_0}{I}-1}} dz' (1 + z'^2) \left[\ln \frac{I_0}{I(1 + z'^2)} \right]^{1/2} \\ \times \int_0^\infty \frac{1}{2} I d(r^2) \delta \left[I - I_0(1 + z'^2)^{-1} \exp(-r^2) \right]. \quad (6.17)$$

Zadnji integral na desnoj strani izraza (6.17) jednak je jedinici, pa konačno dobivamo

$$N = 2\pi z_0 w_0^2 \tau \int_0^{I_{\max}} \frac{dI}{I} R(I) \int_0^{\sqrt{\frac{I_0}{I}-1}} dz' (1 + z'^2) \left[\ln \frac{I_{\max}}{I(1 + z'^2)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.18)$$

Interesantno je da dužina trajanja pulsa τ doprinosi rezultatu samo kao konstanta proporcionalnosti. Za slučaj slabog fokusiranja, kada je Rayleighev opseg z_0 veliki u poređenju sa prečnikom atomskog snopa $\bar{z}$, integral po z' u jednačini (6.18) se može procijeniti na $[\ln(I_0/I)]^{1/2}$ [153]. Koristeći ovaj rezultat, konačno možemo zapisati da izraz za fokalno usrednjenu diferencijalnu vjerovatnoću jonizacije ima sljedeći oblik

$$\langle w_{\mathbf{p}i} \rangle \propto \int_0^{I_{\max}} \frac{dI}{I} \left(\ln \frac{I_{\max}}{I} \right)^{1/2} \sum_n w_{\mathbf{p}i}(n) \delta(E_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{p}} + U_{\mathbf{p}} - n\omega), \quad (6.19)$$

gdje je $w_{\mathbf{p}i}$ diferencijalna vjerovatnoća jonizacije u jedinici vremena data sa (4.27), dok je n broj apsorbovanih fotona iz laserskog polja pri piku intenziteta $I_{\max}$. Delta funkcija poništava integral po I , tako da se za svaku fiksnu vrijednost energije elektrona $E_{\mathbf{p}}$ i ugao emisije θ , fokalno usrednjeni prinos elektrona $\langle w_{\mathbf{p}i} \rangle$ može izračunati preko sume po n

$$\langle w_{\mathbf{p}i} \rangle \propto \sum_{n > n_{\min}}^{n_{\max}} \frac{1}{n\omega - E_{\mathbf{p}} - I_{\mathbf{p}}} \left(\ln \frac{U_{\mathbf{p},\max}}{n\omega - E_{\mathbf{p}} - I_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} w_{\mathbf{p}i}(n), \quad (6.20)$$

pri čemu vrijedi da je $(E_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{p}})/\omega < n < (E_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{p}} + U_{\mathbf{p},\max})/\omega$.

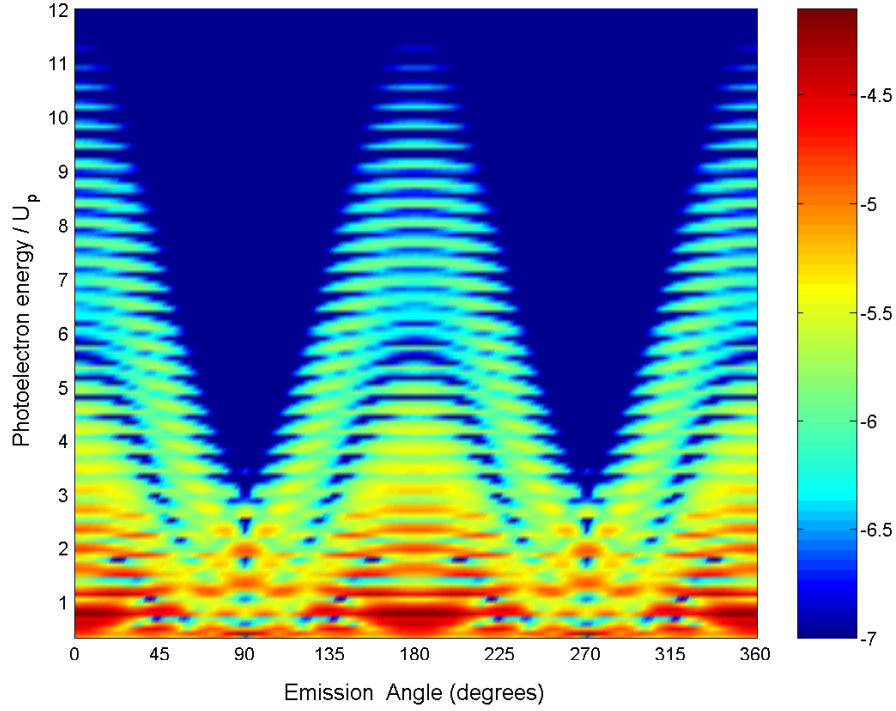
6.2 Primjer ATI simulacije za Kr i Xe

U ovom odjeljku želimo simulirati odgovarajuće eksperimentalne rezultate predstavljene u [148] koristeći kvantno-mehaničku teoriju iznešenu u četvrtom poglavlju ovog magistarskog rada. Prezentovaćemo rezultate koji se odnose na jonizaciju iznad praga višeg reda atoma ksenona (Xe) i kriptona (Kr), upotrebom dugih laserskih pulseva. Ukratko navedimo glavne karakteristike nedavno izvedenog eksperimenta grupe u Garchingu. Zahvaljujući razvoju laserske tehnike i specijalno dizajniranim detektorima, u ovom eksperimentu je bilo moguće mjeriti spektar impulsa elektrona u dvije dimenzije. Naime, emitovani fotoelektroni su “snimljeni” korištenjem slikovnog detektora za preslikavanje brzine, koji bilježi projekciju trodimenzionalne raspodjele brzine u dvodimenzionalnoj ravni. Polarizacija je bila linearna i paralelna sa ravni-
nom detekcije, što je omogućilo određivanje ukupne brzine i ugaone raspodjele emitovanih fotoelektrona. U eksperimentu je korišten laser sa stopom ponavljanja oko 3 kHz i odgovarajućim pulsevima dužine trajanja oko 25 fs. Valna dužina je bila podešena na oko 760 nm. Pik intenziteta u slučaju atoma ksenona bio je procijenjen oko vrijednosti $9 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$, a za atom kriptona oko $7.5 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$. Procjena je bila izvršena na osnovu područja energija pridruženih sa $10U_P$ u uglavnom integrisanom fotoelektronskom spektru, te poređenjem sa ranijim rezultatima Gerharda Paulusa [156].

U četvrtom poglavlju smo pokazali da zakon odsijecanja zavisi i od jonizacionog potencijala, jednačina (4.52), te nas to vodi ka zaključku da su procijenjene vrijednosti intenziteta laserskog polja u [148] ipak nešto više, nego one dobivene korištenjem izraza (4.52). U skladu s tim, vrijednost intenziteta laserskog zračenja korištenog pri našoj simulaciji eksperimentalnih rezultata za slučaj atoma ksenona je $8.05 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$. Na slici 6.1 je predstavljen logaritam fokalno usrednjenog diferencijalnog prinosa HATI elektrona za atom ksenona kao funkcija impulsa elektrona u (E_p, θ) ravni. Energije detektovanih elektrona E_p su skalirane po ponderomotornom potencijalu U_P . Rezultati su dobiveni, kako smo već i kazali, numeričkom integracijom u okviru SFA teorije. Treba naglasiti da postoji velika sličnost između eksperimentalnih rezultata i onoga što smo dobili numeričkom integracijom, ali glavna eksperimentalno opažena karakteristika spektra, interferentna struktura pri uglovima emisije elektrona u odnosu na osu polarizacije od 30° i 60° , nije dobro reprodukovana našom simulacijom. Također, ovi rezultati potvrđuju zavisnost zakona odsijecanja od ugla emisije predstavljene na slici 5.4.

Na slici 6.2 je predstavljena simulacija procesa na atomu kriptona. I u ovom slučaju možemo izvesti slične zaključke kao i u prethodnom. Valna dužina je 760 nm, a pik intenziteta je oko $7.5 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$.

Nešto više o mogućim razlozima neslaganja dijela eksperimentalnih rezul-

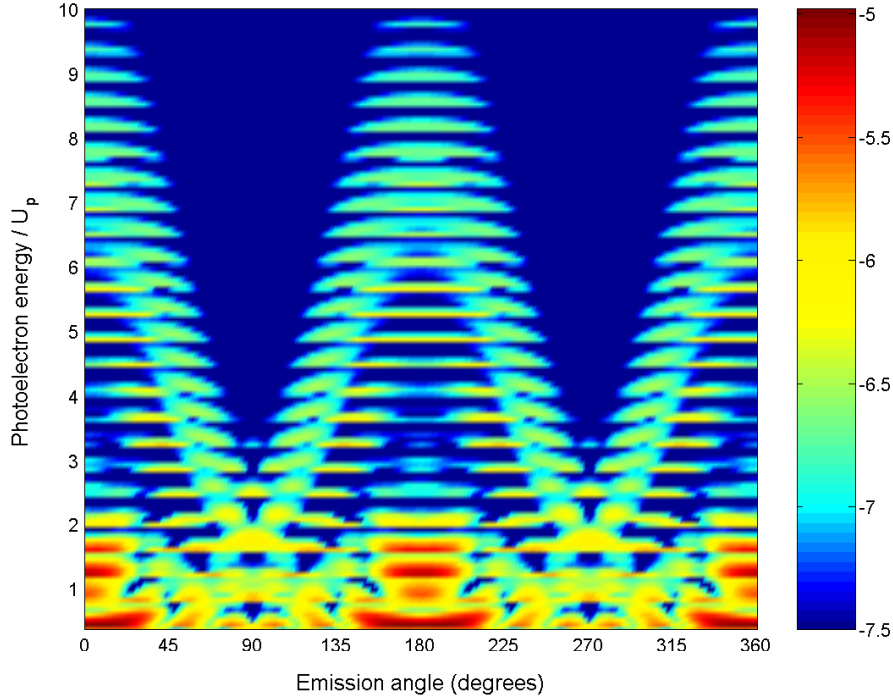


Slika 6.1: Logaritam fokalno usrednjenog diferencijalnog prinosa HATI elektrona za atom ksenona (Xe), kao funkcija impulsa elektrona predstavljen u ravni (E_p, θ) . Pik intenziteta je $8.05 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$, a valna dužina je 760 nm. Izbor potencijala i početne valne funkcije u skladu je sa iznešenim u petom odjeljku ovog poglavlja. Rezultati su dobiveni numeričkom integracijom u okviru SFA teorije.

tata sa našom simulacijom navešćemo u posljednjem odjeljku ovog poglavlja.

6.3 Ponderomotorna energija i zatvaranje kanala

U prisustvu dovoljno dugog laserskog pulsa, prag stvarnog kontinuuma je pomjeren za energiju ponderomotornog potencijala (slika 6.3), koju smo na početku trećeg poglavlja definisali kao usrednjenu energiju oscilovanja, naravno unutar jednog optičkog ciklusa [pogledati izraz (3.5)]. Fizikalni razlog za ovo pomjeranje praga kontinuuma leži u činjenici da je stanje sa najnižom energijom elektrona u laserskom polju, ono kada elektron posjeduje samo energiju oscilovanja (eng. wigling), tj. kada osciluje bez ikakvog dodatnog driftnog impulsa $\mathbf{p}$, koji predstavlja mjeru ukupne energije detektovanog elek-

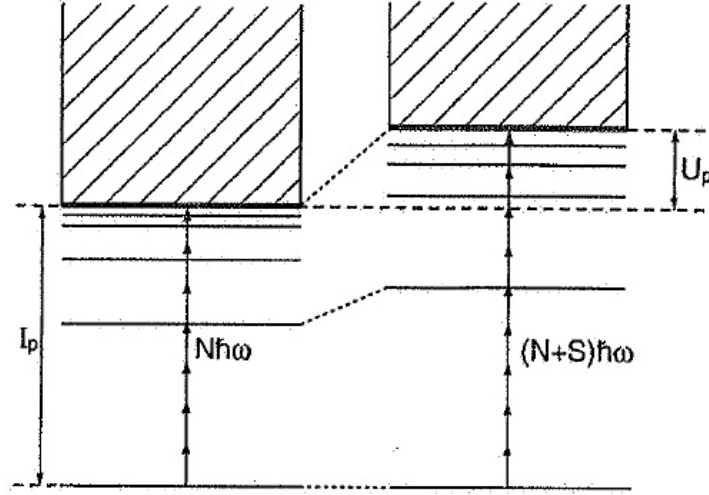


Slika 6.2: Logaritam fokalno usrednjenog diferencijalnog prinosa HATI elektrona za atom kriptona (Kr), kao funkcija impulsa elektrona predstavljen u ravni (E_P, θ) . Pik intenziteta je $7.5 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$, a valna dužina je 760 nm. Izbor potencijala i početne valne funkcije u skladu je sa iznešenim u petom odjeljku ovog poglavlja. Rezultati su dobiveni numeričkom integracijom u okviru SFA teorije.

trona. Usljed toga se, kako smo već naglasili u prvom odjeljku, odgovarajući HATI spektar sastoji od pikova pri energijama određenim sa relacijom (6.1).

Pri ovom razmatranju možemo bez problema zanemariti Starkov efekt. Visokoenergetska Rydbergova stanja, u većini slučajeva, su pomaknuta za energiju koja približno odgovara ponderomotornoj energiji [157]. Na taj način je amplituda oscilirajućeg kretanja (wigling kretanje) manja nego širina Rydbergovog stanja u odsustvu laserskog polja. Važno je naglasiti da za kratkodosežni potencijal i potencijal nultog dometa ne postoje Rydbergove serije ispod praga kontinuuma.

Vratimo se na trenutak izrazu (6.19). Kako možemo primijetiti, svi intenziteti u intervalu od $I = 0$ do $I = I_{\max}$, ili ekvivalentno tome, sve vrijednosti ponderomotorne energije u opsegu od $U_P = 0$ do $U_{P,\max} = I_{\max}/(4\omega^2)$, doprinose fokalno usrednjenom prinosu HATI elektrona. Poznato je da pri tačno određenim vrijednostima intenziteta laserskog polja stopa jonizacije pokazuje rezonantno ponašanje. Ovo je tzv. efekt zatvaranja kanala ("channel-



Slika 6.3: Struktura energetskeg nivoa relevantna za multifotonsku jonizaciju. Na lijevoj strani slike, pri nižim intenzitetima, N fotona je potrebno za jonizaciju. Za jaka laserska polja, dakle pri većim intenzitetima, prag kontinuuma se pomjera za energetski iznos ponderomotornog potencijala. Sada je neophodno dodatnih S fotona za jonizaciju [14].

closing”) [153]. Uzimajući u obzir uslov sačuvanja energije, iskazan preko argumenta delta funkcije u izrazu (6.19), možemo pisati da vrijedi

$$E_p = n\omega - I_P - U_P \geq 0, \quad (6.21)$$

te na osnovu toga zaključujemo da sa porastom intenziteta laserskog polja, sve više i više fotona je neophodno za jonizaciju. Kada intenzitet dostigne određenu vrijednost $I_c \equiv 4\omega^2 U_{Pc}$, gdje n_c fotona nije dovoljno, nego je potrebno $n_c + 1$ fotona za jonizaciju, tj. kada imamo da je

$$n_c \omega = I_P + U_{Pc}, \quad (6.22)$$

onda je jedan n_c fotonski kanal zatvoren. Odgovarajuće vrijednosti intenziteta laserskog polja koje vode ka zatvaranju kanala su date sa

$$I_c = (n_c \omega - I_P) 4\omega^2, \quad (6.23)$$

dok su vrijednosti n_c definisane na sljedeći način

$$n_c = n_{c,\min}, n_{c,\min} + 1, \dots, n_{c,\max}, \quad (6.24)$$

pri čemu je $n_{c,\min} = [I_P/\omega] + 1$, odnosno $n_{c,\max} = [(I_P + U_{P,\max})/\omega]$. Obje ove vrijednosti su relevantne za laserski puls sa maksimalnim intenzitetom $I_{\max}$.

Iz zakona održanja energije, izraženog preko izraza (6.21) uz $n = n_c$, primjećujemo da pri efektu zatvaranja kanala elektroni mogu biti oslobođeni sa veoma malom kinetičkom energijom. Dakle, u ovom slučaju je energija n_c fotona skoro u potpunosti iskorištena za savladavanje potencijala veze pomaknutog za iznos U_P . Takvi elektroni, koji imaju driftni impuls oko nule, imaju mogućnost za mnogo više povrata ka matičnom jonu nego oni oslobođeni sa velikom vrijednošću driftnog impulsa. Jasno, pri svakom eventualnom povratku elektron se može elastično rasiјati. U takvom slučaju dolazi do konstruktivne interferencije velikog broja kvantnih orbita [72]. U razmatranjima koja slijede, u narednim odjeljcima, ovo će biti od suštinskog značaja.

Posmatrajući prinos elektrona za fiksnu vrijednost energije i ugla, kao funkcije intenziteta, pri samom efektu zatvaranja kanala možemo zapaziti oštra pojačanja tih dijelova spektra. Općenito, ona se mogu desiti za sve dozvoljene energije elektrona, ali, ipak, su u dosada prikazanim rezultatima najizraženija bila u intervalu energija $5U_P \lesssim E_p \lesssim 8U_P$ ($\theta = 0, \pi$). Tačno pri zatvaranju određenog kanala, spektar HATI elektrona se sastoji od pikova pri sljedećim vrijednostima energije

$$E_p = (n - n_{c,\min})\omega \quad (n \geq n_{c,\min}). \quad (6.25)$$

6.4 Pojačanje dijelova HATI spektra

Kako smo naglasili u uvodnom dijelu ovog poglavlja, devedesetih godina prošlog vijeka je u nekoliko izvedenih eksperimenata opaženo naglašeno pojačavanje grupe pikova u plato regiji, za približno jedan red veličine, a pri promjeni intenziteta od samo par procenata [149, 150]. Ovakvo ponašanje je sugerisalo da se radi o rezonantnim procesima. Blizu područja rezonanci kontrasti samog spektra su značajno izbrisani. Ovakvi efekti su u dosada izvršenim eksperimentima bili najizraženiji kod argona (pogledati rad [118] i reference unutar njega).

Veliki korak ka razumijevanju navedenih efekata je bila teorijska studija u kojoj je korištena SAE aproksimacija pri numeričkom rješavanju jednočestične vremenski zavisne Schrödingrove jednačine u tri dimenzije [152]. Potencijal je biran tako da optimalno opisuje posmatrani atom. To je, dakle, bio model koji je uključivao “soft core” i dalekodosežni Coulombov potencijal. Ova razmatranja su u potpunosti odbacila mogućnost bilo kakve elektron-elektron korelacije kao uzroka ovih pojačanja. U radu [153] ovaj fenomen je objašnjen pomoću SFA aproksimacije uz upotrebu potencijala nultog dometa. Oba ova pristupa daju iste kvalitativne karakteristike spektra, bez obzira na oprečnost samih modela. S jedne strane, model koji uključuje potencijal

nultog dometa u prisustvu vanjskog polja ne podržava bilo kakva pobuđena stanja, niti rezonance u kontinuumu, dok potencijal beskonačnog dometa, zahvaljujući Rydbergovim serijama ispod praga kontinuuma ne definiše jasno efekat zatvaranja kanala. Kao zajednički element, koji u oba mehanizma dovodi do sličnih rezultata, je mogućnost postojanja međustanja sa driftnim impulsom oko nule za određene, strogo definisane, intenzitete laserskog polja, koji formiraju niz pikova u spektru sa određenim međusobnim razmakom. U slučaju potencijala nultog dometa ovo je izraženo jednačinama (6.21) i (6.22), odnosno efektom zatvaranja kanala. Za realistični Coulombov potencijal ovakav mehanizam bi bio osiguran činjenicom da visoko pobuđena Rydbergova stanja mogu ostati izuzetno stabilna u prisustvu vanjskog jakog polja, tako da su ponderomotorne oscilacije superponirane na orbitu elektrona na koju polje nema uticaja [153]. Takvo stanje, odnosno superpozicija stanja, je preferabilno, ako je multifotonski rezonantna sa osnovnim stanjem. U oba slučaja, elektron je suočen sa mogućnošću višestrukih povrataka prije naknadnog rasijanja. Ovo može voditi ka konstruktivnoj interferenciji različitih staza koje vode u konačno stanje.

6.5 Objašnjenje pojačanja primjenom metode kvantnih orbita

U ovom odjeljku iznosimo nove rezultate koji su povezani sa pojačanjima HATI spektra pri zatvaranju parnih, odnosno neparnih kanala. U skladu sa izrazom (5.3), zaključujemo da je odgovarajući matrični element $T_{\mathbf{p}i}^{(1)}(n)$ predstavljen kao suma parcijalnih doprinosa koji odgovaraju različitim rješenjima dobivenim metodom sedlaste tačke. Da bi uopšte analizirali interferenciju pomenutih parcijalnih doprinosa, neophodno je T -matrični element prikazati u sljedećoj formi

$$T_{\mathbf{p}i}^{(1)}(n) = \sum_s a_s \exp(i\Phi_s), \quad (6.26)$$

pri čemu su $a_s > 0$ i Φ_s realni. Interferencija će biti konstruktivna, ako su svi parcijalni doprinosi u fazi. Nađimo sada odgovarajuće fazne elemente za data aproksimativna analitička saddle-point rješenja (5.12) i (5.13), jasno, pretpostavljajući male vrijednosti koje poprma stacionarni impuls k , tj. zahtijevajući duga vremena putovanja HATI elektrona.

Krenimo prvo od $\exp(iS_s)$ u izrazu (5.3). Uzimajući u obzir (5.4), potrebno je naći realni dio od sljedećeg izraza

$$S(\varphi_0^{(1)}, \varphi^{(1)}, k^{(2)}) = \frac{4U_P}{\omega} \left[\frac{q^2}{2} \varphi^{(1)} + q \sin \varphi^{(1)} \cos \theta + \frac{k^{(2)^2}}{2} (\varphi^{(1)} - \varphi_0^{(1)}) \right] \\ + \frac{I_P}{\omega} \varphi_0^{(1)} + \frac{U_P}{\omega} \left[\varphi_0^{(1)} + \sin \varphi_0^{(1)} \cos \varphi_0^{(1)} \right]. \quad (6.27)$$

Nakon dužeg računa za realne dijelove drugog i trećeg člana u prvoj zagradi možemo pisati

$$\sin \varphi^{(1)} = \alpha \left[\sqrt{1 - \frac{q^2}{4 \cos^2 \theta}} - \left(\frac{q}{2 \cos \theta} \right) \frac{k^{(1)}}{2 \cos^2 \theta \sqrt{1 - \left(\frac{q}{2 \cos \theta} \right)^2}} \right], \quad (6.28)$$

i

$$\text{Re} \{ k^{(2)^2} (\varphi^{(1)} - \varphi_0^{(1)}) \} \approx k^{(1)^2} \left\{ 2m\pi - (1 - \alpha)\pi + \beta \frac{\pi}{2} \right. \\ \left. + \alpha \left[\frac{2 \left(\frac{q}{2 \cos \theta} \right)}{2 \cos^2 \theta \sqrt{1 - \left(\frac{q}{2 \cos \theta} \right)^2}} - \arccos \left(\frac{-q}{2 \cos \theta} \right) \right] \right\}, \quad (6.29)$$

odnosno za posljednji član u cijelom izrazu vrijedi

$$\text{Re} (\sin \varphi_0^{(1)} \cos \varphi_0^{(1)}) = -\frac{\beta k^{(1)}}{\sqrt{1 + \gamma^2}} (1 + 2\gamma^2). \quad (6.30)$$

Uvrštavajući realne dijelove izraza (5.17) i (5.18), te tri prethodno navedene relacije u jednačinu (6.27), nakon sređivanja dobijemo

$$\text{Re } S_{\alpha\beta m} = \frac{4U_P}{\omega} \left\{ \frac{q^2}{2} \left[(1 - \alpha)\pi + \alpha \arccos \left(-\frac{q}{2 \cos \theta} \right) \right] \right. \\ \left. + \alpha q \cos \theta \sqrt{1 - \frac{q^2}{4 \cos^2 \theta}} \right\} + \frac{I_P + U_P}{\omega} \left(\beta \frac{\pi}{2} - 2m\pi \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{2m\pi} \right). \quad (6.31)$$

Posljednji član u gornjem izrazu predstavlja prvu popravku po maloj veličini $1/(2m\pi)$ i ima sljedeću formu

$$\mathcal{O} \left(\frac{1}{2m\pi} \right) = \frac{4U_P}{\omega} \frac{1}{4m\pi} \left[\beta \sqrt{1 + \gamma^2} - \alpha \sqrt{1 - \frac{q^2}{4 \cos^2 \theta}} \right]^2. \quad (6.32)$$

6.5 Objašnjenje pojačanja primjenom metode kvantnih orbita 119

Naredni doprinosi fazi Φ_s , unutar (5.3), dolaze od matricekih elemenata, te izraza u nazivniku Δ_s definisanog relacijama (5.5), (5.6) i (5.7). Prvo ćemo izložiti doprinos koji potiče od Δ_s , potom ćemo se baviti izborom potencijala i početne valne funkcije, te naposljetku predstaviti doprinose fazi koji dolaze od matricekih elemenata u kojima se pojavljuju potencijal, odnosno početna valna funkcija. Prelazeći na nove varijable kao u drugom odjeljku prethodnog poglavlja, te nakon sređivanja izraza Δ_s , dobijemo da vrijedi

$$\begin{aligned}\Delta_s &\propto [k^{(2)} + \cos \varphi_0^{(1)}][k^{(2)} - q \cos \theta] \sin \varphi_0^{(1)} \sin \varphi^{(1)} (\varphi^{(1)} - \varphi_0^{(1)})^3 \\ &\approx (-i\beta\gamma)(-q \cos \theta) \alpha \sqrt{1 + \gamma^2 \beta} \sqrt{1 - \frac{q^2}{4 \cos^2 \theta}} (2m\pi)^3, \quad (6.33)\end{aligned}$$

gdje smo zanemarili članove reda $\mathcal{O}[1/(2m\pi)]$. Dakle, vrijedi

$$\Delta_s^{-1/2} \propto \exp[i(\alpha - 1)\pi/4], \quad (6.34)$$

odakle zaključujemo da je doprinos fazi dat sa

$$(\alpha - 1) \frac{\pi}{4}. \quad (6.35)$$

Obratimo sada pažnju na izbor potencijala koji se pojavljuje u prvom matricekom elementu $V_{\mathbf{k}_s - \mathbf{p}}$ izraza (5.3), odnosno adekvatan izbor valne funkcije koja opisuje osnovno stanje posmatranog atoma i pojavljuje se u drugom matricekom elementu $\langle \mathbf{k}_s + \mathbf{A}(t_{0s}) | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t_{0s}) | \psi_i \rangle$ istog izraza. Što se tiče odgovarajuće valne funkcije, u aproksimaciji jednog aktivnog elektrona (eng. Single-Active-Electron, SAE), valna funkcija osnovnog stanja, označimo je sa ψ_i , je u stvari valna funkcija vanjskog (valentnog) elektrona posmatranog atoma. Ova valna funkcija može biti data u analitičkoj formi razvojem po Slaterovim atomskim orbitalama. Mi ćemo tu funkciju izabrati kao valnu funkciju Hartree-Fockovog tipa

$$\psi_i(\mathbf{r}) = \sum_j C_j N_j r^{n_j-1} \exp(-\zeta_j r) Y_{l_0}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (6.36)$$

U (6.36) n_j i l predstavljaju kvantne brojeve elektrona, dok su C_j , N_j i ζ_j parametri koji karakterišu radijalnu raspodjelu elektronske gustine. Svi navedeni parametri za inertne gasove He, Ne, Ar, Kr i Xe su tabelirani u [137]. Označimo matriceki element unutar izraza (5.3) u kojem se pojavljuje ψ_i sa M_0 . Ovaj matriceki element može biti proračunat analitički. Ovdje nećemo iznositi tako dug i zamoran račun. Konačna forma je takvog oblika da zavisi od toga da li valna funkcija opisuje atom karakterisan s-stanjem ili p-stanjem valentnog elektrona. U prvom slučaju je dobiveni rezultat takav

da je M_0 proporcionalno sa $E(\varphi_0)(k + \cos \varphi_0)$, dok je za p-stanje odgovarajući matrični element proporcionalan sa $E(\varphi_0)$. Ovaj rezultat možemo zapisati na sljedeći način

$$M_0 \propto \begin{cases} \sin \varphi_0 (k + \cos \varphi_0) & \text{(za s stanja poput atoma He),} \\ \sin \varphi_0 & \text{(za p stanja poput atoma Ne, Ar, Kr ili Xe).} \end{cases} \quad (6.37)$$

Uzimajući u obzir izraz (5.15), te sljedeću relaciju

$$\cos \varphi_0^{(1)} = -k^{(1)} - i\beta\gamma, \quad (6.38)$$

dobijemo da je

$$M_0 \propto \exp[i(1 - \beta)l\pi/2], \quad (6.39)$$

tako da konačno možemo zapisati da je doprinos fazi Φ_s od M_0 dat sa

$$(1 - \beta)l\frac{\pi}{2}, \quad (6.40)$$

pri čemu je $l = 0$ za s-stanja, a $l = 1$ za p-stanja.

Ostaje nam još izbor potencijala, te doprinos fazi matričnog elementa u kojem se isti pojavljuje.

U radu [24] je pri razmatranju elektron-atomskog rasijanja u prisustvu laserskog polja potencijal rasijanja predstavljen kao suma polarizacionog i statičkog. Izmjenski efekti su bili zanemareni. Pokazalo se da za teže atomske mete doprinos polarizacionog potencijala može biti zanemaren u poređenju sa odgovarajućim doprinosom statičkog potencijala. Statički potencijal uključuje interakciju dolazećeg elektrona sa jezgrom i elektronskim oblakom atoma. Za složenije atome nemoguće je dobiti analitički izraz za Fourierov transform (4.24) pri izboru pomenutog potencijala. Međutim, problem može biti značajno pojednostavljen korištenjem poluempirijskog potencijala jezgre, tj. tretiranjem mete kao kvazi-jednoelektronske mete [158]. Relativno jednostavan analitički potencijal za opis elastičnog rasijanja elektrona na atomima je predložen u [159, 160]. Ovaj potencijal je baziran na modelu koji je u literaturi poznat kao IPM (eng. Independent-Particle-Model). To je model za vezana stanja elektrona u atomu, koji je blisko povezan sa Hartree-Fockovim modelom [161]. Mi ćemo upotrijebiti IPM potencijal predstavljen dvostrukim Yukawinim potencijalom [162]

$$V(r) = -\frac{Z}{H} \frac{e^{-r/D}}{r} [1 + (H - 1)e^{-Hr/D}], \quad (6.41)$$

6.5 Objašnjenje pojačanja primjenom metode kvantnih orbita 121

gdje je $H = DZ^{0.4}$. Vrijednosti parametra D za skoro sve atome mogu se naći u [161]. U tablici 6.1 date su vrijednosti ovog parametra za većinu atoma plemenitih gasova, koje su nam bile potrebne u numeričkim proračunima.

Fourierov transformat (4.24) potencijala $V(r)$, datog jednačinom (6.41) je

$$V_{\mathbf{K}} = -\frac{Z}{2\pi^2 H} \left[\frac{1}{K^2 + D^{-2}} + \frac{H-1}{K^2 + \left(\frac{H+1}{D}\right)^2} \right], \quad (6.42)$$

pri čemu je vektor $\mathbf{K}$ definisan sa

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_s - \mathbf{p}. \quad (6.43)$$

Uz odgovarajuću smjenu varijabli izvršenoj u odjeljku 5.2 i jednačinu (5.10), te relaciju

$$\cos \varphi^{(1)} = -\frac{q}{2 \cos \theta} - \frac{k^{(1)}}{2 \cos^2 \theta}, \quad (6.44)$$

može se jednostavno pokazati da vrijedi

$$V_{\mathbf{K}} = V_{-\mathbf{p}}, \quad (6.45)$$

pri čemu smo zanemarili prvi korekcionni faktor reda veličine $1/(2m\pi)$. Dakle, možemo zaključiti da matricni element $V_{\mathbf{k}_s-\mathbf{p}}$ ne doprinosi fazi Φ_s .

Konačno, uzimajući u obzir relacije (6.31), (6.35) i (6.40), fazu Φ_s koja se javlja u izrazu (6.26), možemo predstaviti kao

$$\Phi_{\alpha\beta m} = \text{Re } S_{\alpha\beta m} + (\alpha - 1)\frac{\pi}{4} + (1 - \beta)l\frac{\pi}{2}. \quad (6.46)$$

U slučaju da je ispunjen uslov $I_P + U_P = n_c\omega$, pri čemu je n_c cijeli broj, iz relacija (6.31) i (6.46) slijedi

$$\Phi_{\alpha\beta m} \propto (n_c - l)\frac{\beta\pi}{2}, \quad (6.47)$$

odnosno vrijedi

$$\Phi_{\alpha 1m} - \Phi_{\alpha -1m} = (n_c - l)\pi. \quad (6.48)$$

Iz prethodnog izraza slijedi da će do konstruktivne interferencije, odnosno pojačanja dijela spektra doći za p-stanja ($l = 1$) kada je n_c neparno. Jasno, kada razmatramo s-stanja ($l = 0$), tada se pojačanja dijela HATI spektra odigravaju pri parnim vrijednostima n_c .

Tablica 6.1: Vrijednosti parametra D dvostrukog Yukawinog potencijala [161] za neke plemenite gasove sa nabojem jezgre Z . Također su navedene konfiguracije osnovnih stanja valentnih elektrona, odgovarajuće jonizacijske energije I_P [137], kao i intenziteti zasićenja I_{sat} [15].

Atom	Z	D	I_P (eV)	I_{sat} (10^{13} W/cm ²)
He (1s)	2	0.215	24.59	150
Ne (2p)	10	0.500	21.56	83
Ar (3p)	18	0.862	15.76	20
Kr (4p)	36	0.689	14.00	13
Xe (5p)	54	0.940	12.13	7

6.6 Uticaj pojačanja na fokalno usrednjeni spektar

Cilj nam je u ovom odjeljku objasniti numeričke rezultate za fokalno usrednjeni HATI spektar. Na kraju odjeljka ćemo navesti, po našem mišljenju, moguće razloge djelomičnog neslaganja rezultata koje smo mi dobili sa eksperimentalnim podacima.

Na slikama 6.4 i 6.5 su predstavljeni fokalno usrednjeni spektri elektrona pri jonizaciji atoma Xe, odnosno atoma Kr. Emisija elektrona je bila u pravcu $\theta = 0^\circ$. Laserski parametri su isti kao na slikama 6.1 i 6.2, respektivno. Analizirajmo sada rezultate predstavljene na ovim slikama. U tabelama 6.2 i 6.3 smo predstavili karakteristične fotonske kanale n_c (prvi red), kao i odgovarajuće vrijednosti ponderomotornog potencijala (preostala tri reda), u slučaju HATI simulacije za atom ksenona, odnosno atom kriptona, respektivno. Osnovna stanja oba ova atoma su p-stanja. Kako je već naglašeno u prethodna dva odjeljka ovog poglavlja, u oba slučaja možemo očekivati snažna pojačanja dijela HATI spektra za neparno n_c . Za ksenon, maksimalna ponderomotorna energija iznosi $U_{P,\text{max}} = 4.34$ eV što je neznatno iznad vrijednosti ponderomotornog potencijala $U_{P,c} = 4.18$ eV koja odgovara zatvaranju kanala $n_c = 10$. Dakle, radi se o zatvaranju parnog kanala. Pojačanje koje se odigrava pri zatvaranju neparnog $n_c = 9$ kanala bi trebalo da dominira dijelom spektra sa intervalom energija $13 \lesssim E_p [\text{eV}] \lesssim 20$. U svakom slučaju, mi opažamo veoma oštre pikove pri energijama $E_p = n\omega$ u ovom energetskom intervalu. Međutim, intenzitet koji odgovara $U_{P,c} = 2.55$ eV je

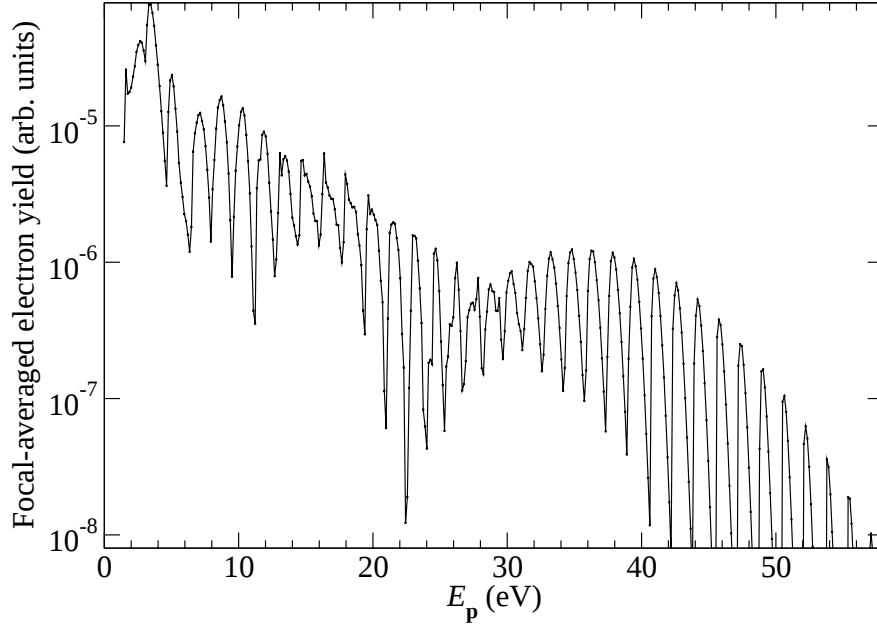
značajno ispod one vrijednosti ponderomotornog potencijala koji odgovara maksimalnom intenzitetu, tako da su pojačani pikovi na vrhu stražnjeg dijela pomenutog energetskog područja povezanog sa višim intenzitetima. Posljednja zaobljena izbočina, vidljiva u krajnjem dijelu spektra pri energijama iznad 30 eV, nije povezana sa efektom zatvaranja kanala. Pozicije pikova tog dijela spektra su date relacijom (6.21), za razliku od onih koji potiču od rezonantnih efekata karakterisanih relacijom (6.25). Dakle, izbočina krajnjeg dijela spektra je povezana sa zakonom odsijecanja visokoenergetskog dijela spektra [pogledati relaciju (4.52)] i dominantno je određena elektronima emitovanim u dijelu fokusa sa najvećim intenzitetom.

Tablica 6.2: Relevantni kanali n_c pri kojima se odigrava efekat zatvaranja kanala i karakteristične vrijednosti ponderomotorne energije U_{Pc} povezane sa intenzitetima koji vode ka zatvaranju navedenih kanala, u slučaju atoma ksenona. Za uglove $\theta = 0, \pi$ očekivana pojačanja dijela HATI spektra se opažaju u intervalu energija fotoelektrona $5U_{Pc} \lesssim E_p \lesssim 8U_{Pc}$. Ionizacioni potencijal atoma ksenona je $I_P = 12.13$ eV, energija fotona laserskog polja $\hbar\omega = 1.631$ eV, dok je maksimalna vrijednost ponderomotorne energije $U_{P,max} = 4.34$ eV.

n_c	8	9	10	11
U_{Pc}	0.92	2.55	4.18	5.82
$5U_{Pc}$	5	13	21	29
$8U_{Pc}$	7	20	34	47

Tablica 6.3: Slično kao u prethodnoj tabeli, samo što su prikazane relevantne vrijednosti odgovarajućih veličina za slučaj HATI simulacije atoma kriptona. Ionizacioni potencijal je $I_P = 14.00$ eV, dok je maksimalna vrijednost ponderomotornog potencijala $U_{P,max} = 4.04$ eV.

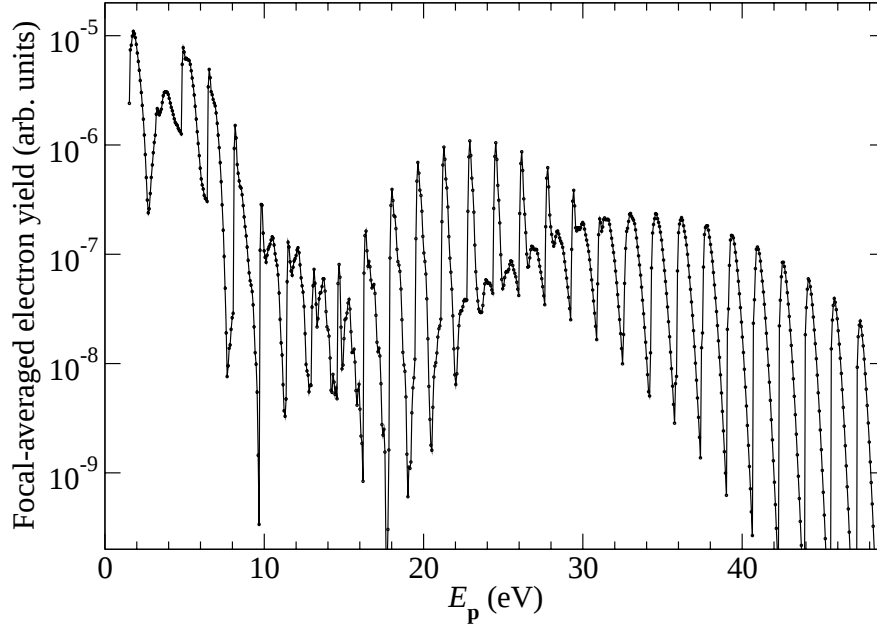
n_c	9	10	11	12
U_{Pc}	0.68	2.31	3.94	5.58
$5U_{Pc}$	3.4	12	20	28
$8U_{Pc}$	5.5	19	32	45



Slika 6.4: Fokalno usrednjeni spektar HATI elektrona za atom ksenona (Xe), kao funkcija energije detektovanih elektrona. Emisija elektrona je u pravcu $\theta = 0^\circ$. Parametri koji karakterišu lasersko polje su identični sa onim na slici 6.1.

Za razliku od prethodnog slučaja, parametri koji odgovaraju simulaciji jonizacije iznad praga atoma kriptona su optimalni uslovi za iskazivanje efekta zatvaranja kanala. Zatvaranju neparnog $n_c = 11$ kanala odgovara vrijednost ponderomotorne energije $U_{P,c} = 3.94$ eV što je neznatno ispod njene maksimalne vrijednosti $U_{P,max} = 4.04$ eV. Pojačani dio spektra bi trebao biti u intervalu energija fotoelektrona $20 \lesssim E_p [\text{eV}] \lesssim 32$. Upravo u tom dijelu, na slici 6.5, primjećujemo jako izražene, oštre i uske pikove pri odgovarajućim pozicijama $E_p = n\omega$. Kao i u slučaju ksenona, pikovi koji se javljaju u visokoenergetskom dijelu spektra nisu povezani sa efektima zatvaranja kanala.

Prethodno izložene analize numeričkih rezultata za fokalno usrednjeni HATI spektar atoma Xe i Kr se odnose na slučaj kada su fotoelektroni emitovani pod uglom 0° u odnosu na osu polarizacije i mogu biti poopšteni na slučaj proizvoljnog ugla emisije. Efekat zatvaranja kanala ostaje, samo su sada odgovarajući cutoffovi niži, jasno, u skladu sa rezultatima predstavljenim u odjeljku 5.4. Za veće vrijednosti ugla θ , fokalno usrednjeni spektar izgleda poput onih na slikama 6.4 i 6.5, dobivenim za $\theta = 0^\circ$, samo što je sada osa na kojoj su predstavljene energije detektovanih fotoelektrona “sužena”. Na slici 6.6 su predstavljene envelope fokalno usrednjenih spektara za Kr i

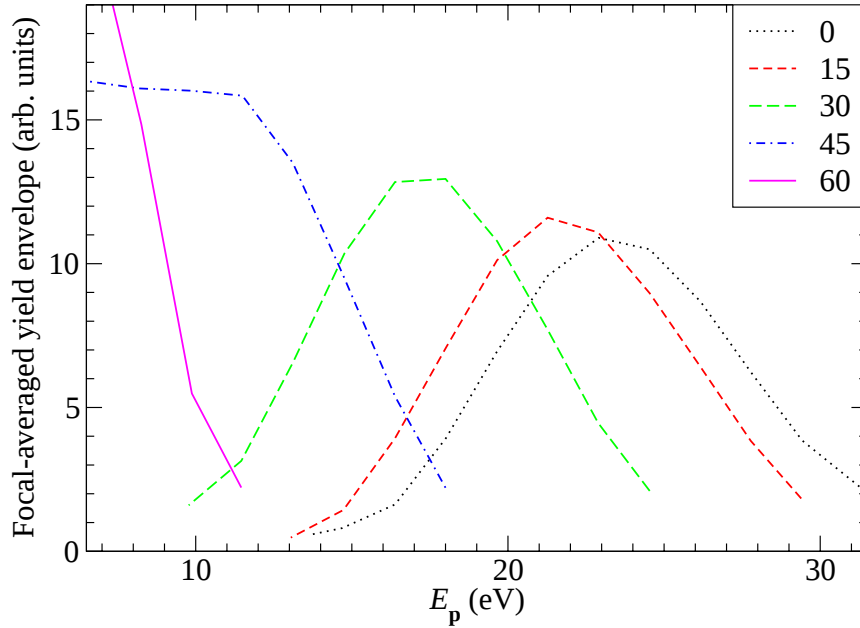


Slika 6.5: Fokalno usrednjeni spektar HATI elektrona za atom kriptona (Kr), kao funkcija energije detektovanih elektrona. Emisija elektrona je u pravcu $\theta = 0^\circ$. Parametri koji karakterišu lasersko polje su identični sa onim na slici 6.2.

emisiju fotoelektrona pod uglovima $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ i 60° . Na slici je prikazan samo slučaj koji odgovara zatvaranju jedanaestofotonskog kanala. Za veće vrijednosti ugla θ pozicija cutoffa je niža, tako da su grupe odgovarajućih pikova pomjerene ka nižim vrijednostima energije elektrona E_p sa povećanjem ugla θ . Ovo upravo objašnjava ponašanje spektra prikazanog na slici 6.2.

Na kraju ukratko navedimo nekoliko razloga koji bi mogli voditi ka djelomičnom neslaganju eksperimentalnih i rezultata dobivenih putem numeričke integracije:

- (i) Naša simulacija ne uzima u obzir Coulombove efekte. Ovi efekti su važni, osobito za niskoenergetske elektrone. Ova nedoumica može biti provjerena simulacijom koja je zasnovana na traženju egzaktnog rješenja vremenski-zavisne Schrödingerove jednačine.
- (ii) Naša simulacija se odnosi na slučaj beskonačno dugih laserskih pulseva. U eksperimentalnim rezultatima je zapažena blaga asimetrija između prinosa fotoelektrona za $\theta = 0^\circ$ i prinosa za $\theta = 180^\circ$ što je karakteristično za jonizaciju ultrakratkim laserskim pulsevima.
- (iii) Također, efekti koji nisu obuhvaćeni SAE aproksimacijom mogu biti značajni. Teški plemeniti gasovi su složeni i sa jakim unutrašnjim poljima.



Slika 6.6: Envelope fokalno usrednjenih spektara HATI elektrona za atom kriptona (Kr) i emisiju fotoelektrona pod uglovima $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ i 60° . Na slici je prikazan samo slučaj koji odgovara zatvaranju jedanaestofotonskog kanala. Parametri laserskog polja odgovaraju onima na slici 6.5.

Ova činjenica zajedno sa procesom naknadnog rasijanja visokoenergetskih elektrona može proizvesti višeelektronske efekte. Na primjer, pobuđeno stanje jona je moguće, što je i potvrđeno u slučaju objašnjenja nekih efekata u procesu nesekvencijalne dvostruke jonizacije. Dalje, za kompletiranje slike neophodno je uzeti u obzir i izmjenske efekte, rezonance, itd. Do određenog stepena, mi smo već napustili okvire SAE aproksimacije posebnim izborom potencijala rasijanja, odnosno valne funkcije osnovnog stanja.

(iv) Primijenjeni metod fokalnog usrednjavanja bi morao biti modifikovan u slučaju kada pri visokim intenzitetima saturacioni efekti postaju bitni.

Poglavlje 7

Zaključak

Formalizam kvantnih orbita nam je omogućio da izvedemo popravku klasičnog zakona odsijecanja jonizacije iznad praga višeg reda. U slučaju kada je prvi korak posmatranih atomskih procesa višeg reda u laserskom polju jonizacija, klasični zakon odsijecanja bi trebao biti modificiran tako da uključuje zavisnost od jonizacionog potencijala I_P . Kod HATI procesa smo dobili jednostavan analitički izraz za zakon odsijecanja $E_{P,max} = 10.007U_P + 0.538I_P$, koji je validan u širokom opsegu laserskih i atomskih parametara. Isti zakon odsijecanja se može primijeniti i na srodan proces odvajanja elektrona od negativnih jona. U tom slučaju, jonizacioni potencijal atoma mijenjamo sa elektronskim afinitetom.

Analogan zakon odsijecanja procesa generacije viših harmonika je izveden znatno ranije u obliku $\Omega_{max} = 3.173U_P + 1.325I_P$. Prvi član $3.173U_P$ je maksimalna klasično dopuštena kinetička energija elektrona dobivena pod uslovom povratka fotoelektrona svom matičnom jonu. Klasično, emitovani harmonik posjeduje i energiju I_P koja mu je na raspolaganju pri procesu rekombinacije elektrona u osnovno stanje. Međutim, kvantno-mehanička popravka maksimalne energije Ω_{max} emitovanog harmonika je veća za $0.325I_P$ u odnosu na klasično dobivenu vrijednost. Ovaj korekcionni član je analog člana $0.538I_P$ koji smo izveli za slučaj HATI procesa. Također smo pokazali da je novi zakon odsijecanja u saglasnosti sa eksperimentalno dobivenim rezultatima. Opravdanost uvođenja I_P -korekcije je potvrđena i korištenjem metode sedlaste tačke. Pri tome je izvršena odgovarajuća klasifikacija rješenja uvođenjem multiindeksa koji se sastoji od tri broja $s \equiv \alpha\beta m$, što je bilo od posebnog značaja pri analizi efekta pojačanja dijelova HATI spektra. Korištena je i matematički rigoroznija, uniformna aproksimacija kojom su ponovo potvrđeni prethodno dobiveni rezultati.

Pri simulaciji nedavno izvršenih eksperimenata u Garchingu koristili smo poboljšanu aproksimaciju jakog polja koja uključuje rescattering efekte. Te-

orija je poopštena na takav način da imamo adekvatnu analizu HATI procesa na plemenitim gasovima. Posebna pažnja je posvećena izboru početne valne funkcije i potencijala rasijanja. Pored toga, da bi postigli što realističniji model za simulaciju pomenutog eksperimenta razmatrali smo i fokalno usrednjavanje. U fokalno usrednjenom spektru efekti zatvaranja kanala su opaženi nezavisno od vrijednosti maksimalnog intenziteta, a radi činjenice da volumen fokusa uvijek obuhvata područje intenziteta koje je blisko onoj vrijednosti koja vodi ka efektu zatvaranja kanala. Kao posljedica toga, odgovarajuće grupe pikova su uvijek pojačane. Pojačanje dijelova HATI spektra je dalje razmatrano u okvirima rješenja saddle-point metoda. Pokazali smo, kako analitičkim tako i numeričkim proračunom da se pojačanja odigravaju pri tačno određenim vrijednostima intenziteta laserskog polja, te da su ta pojačanja izraženija za parne kanale kada je valentni elektron ozračenog atoma karakterisan s-stanjem (npr. atom He), dok su za atome čiji su valentni elektroni karakterisani p-stanjem (npr. atomi Xe i Kr) pojačanja dijela HATI pikova izraženija za neparne kanale. Efekat zatvaranja kanala, te kao posljedica toga pojačanja pikova su posebno izražena u energetskom intervalu $5 U_P \lesssim E_P \lesssim 8 U_P$ što je u direktnoj vezi sa konstruktivnom interferencijom kvantnih orbita koje doprinose upravo tom dijelu spektra. Kod simulacije eksperimenta u Garchingu predstavljena je i ugaona zavisnost fokalno usrednjenog prinosa HATI elektrona, potom ponašanje rješenja dobijenih primjenom metode sedlaste tačke sa promjenom ugla emisije fotoelektrona, kao i poluklasična analiza zavisnosti zakona odsijecanja visokoenergetskog dijela HATI spektra od ugla emisije. Pri tome je pokazana simetrija $\theta \leftrightarrow \pi \pm \theta$. Kod fokalno usrednjenog spektra, pri promjeni ugla emisije θ , i dalje imamo pojačanje dijelova HATI spektra, samo su rezonantni pikovi sada pomjereni ka manjim vrijednostima energije fotoelektrona sa povećanjem ugla θ . Pojačanja spektra za određene vrijednosti ugla emisije, zapažena u pomenutom eksperimentu, nisu reprodukovana našom simulacijom. Neki od mogućih razloga tog neslaganja navedeni su na kraju odjeljka 6.6.

Dodatak A

Atomske jedinice

Atomske jedinice koje su korištene u ovom radu pri različitim proračunima se definišu preko karakterističnih veličina za atom vodika. U ovom dodatku ćemo uvesti atomske jedinice za one fizikalne veličine koje su od interesa za ovaj rad, te ih povezati sa SI jedinicama. Kako smo vidjeli u radu, kada se koristi atomski sistem jedinica uzima se da je $\hbar = 1, e = 1, m = 1$, gdje je $\hbar = h/2\pi$, a h je Planckova konstanta, dok su e i m elementarni naboj i masa elektrona, respektivno. Prvo ćemo uvesti atomske jedinice za dužinu i energiju. U tu svrhu krenimo od stacionarne Schrödingerove jednačine za jednoelektronski jon u SI jedinicama i koordinatnoj reprezentaciji

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_r^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)\psi = E\psi, \quad (\text{A.1})$$

te potom uvedimo bezdimenzionalne promjenljive

$$\rho = ra, \quad \varepsilon = \frac{E}{W}. \quad (\text{A.2})$$

Iz (A.1) i (A.2) slijedi da je

$$\left(\nabla_\rho^2 + 2\frac{Ze^2m}{4\pi\epsilon_0\hbar^2\rho}a + \frac{2ma^2}{\hbar^2}W\varepsilon\right)\psi = 0. \quad (\text{A.3})$$

Izaberimo atomsku jedinicu za dužinu a_0 ($a_0 = Za$) i atomsku jedinicu za energiju W_0 ($W_0 = W/Z^2$) iz uslova

$$\frac{Ze^2m}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}a = 1, \quad \frac{ma^2}{\hbar^2}W = 1. \quad (\text{A.4})$$

Slijedi da je

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2m}, \quad W_0 = \frac{\hbar^2}{ma_0^2} = \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0\hbar)^2}. \quad (\text{A.5})$$

Uvrštavajući vrijednosti $\hbar = h/2\pi = 1.054\,571\,68 \cdot 10^{-34}$ Js, elementarni naboj $e = 1.602\,176\,53 \cdot 10^{-19}$ C, dielektričku konstantu vakuuma $\varepsilon_0 = 8.854\,187\,817 \cdot 10^{-12}$ C²/(Nm²) u prvi izraz unutar (A.5) dobijamo prvi Bohrov radijus a_0

$$a_0 = 0.529\,177\,249 \cdot 10^{-10} \text{ m}, \quad (\text{A.6})$$

odnosno uvrštavajući u drugi izraz unutar (A.5) dobijamo atomsku jedinicu za energiju W_0

$$W_0 = 4.359\,744\,17 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 27.211\,3962 \text{ eV}. \quad (\text{A.7})$$

Jednačina (A.1) tada ima oblik

$$\left(\nabla_r^2 + \frac{2}{\rho} + 2\varepsilon \right) \psi = 0. \quad (\text{A.8})$$

Kada u jednačinu (A.1) uvrstimo $\hbar = e = m = 1$, te u slučaju kada imamo vodonikov atom stavimo $Z = 1$ i $\varepsilon_0 = 1/4\pi$, onda se ta jednačina upravo svodi na (A.8). Atomska jedinica za energiju jednaka je dvostrukoj energiji jonizacije vodonikovog atoma (1 Rydberg) koja je jednaka $1\text{ Ry} = 13.605\,6923 \text{ eV}$.

Atomsku jedinicu za jačinu električnog polja definišemo kao jačinu elektrostatičkog polja koje stvara čestica sa elementarnim naelektrisanjem e na rastojanju Bohrovog radijusa a_0

$$E_A = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2} = 5.142\,208\,26 \cdot 10^{11} \frac{\text{V}}{\text{m}}. \quad (\text{A.9})$$

Atomska jedinica za intenzitet elektromagnetnog polja je

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{c\varepsilon_0 E_A^2}{2} = 3.509\,447\,58 \cdot 10^{20} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ &= 3.509\,447\,58 \cdot 10^{16} \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Atomska jedinica za brzinu je data brzinom elektrona na prvoj Bohrovoj orbiti

$$v_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{\hbar} = 2.187\,691\,42 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (\text{A.11})$$

Atomska jedinica za vrijeme se dobije iz atomskih jedinica za brzinu i dužinu

$$t_0 = \frac{a_0}{v_0} = (4\pi\varepsilon_0)^2 \frac{\hbar^3}{me^4} = 2.418\,884\,33 \cdot 10^{-17} \text{ s}. \quad (\text{A.12})$$

Frekvencija je određena sa

$$\begin{aligned}\omega_0 = \frac{1}{t_0} &= \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{me^4}{\hbar^3} = 4.134\,137\,32 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1} \\ &= 4.134\,137\,32 \cdot 10^{16} \text{ Hz.}\end{aligned}\tag{A.13}$$

Dodatak B

Metod sedlaste tačke

Metod sedlaste tačke ili metod najbržeg spuštanja (eng. Method of Steepest Descent) je metod koji služi za asimptotsku analizu integrala u kompleksnoj ravni. Ovaj metod predstavlja generalizaciju poznatog Laplaceovog metoda. Metod je prvi razvio B. Riemann krajem pretprošlog vijeka. Nezavisno od njega metod je, također, razvijen od strane Debyeja. Dakle, metod sedlaste tačke je metod za asimptotski razvoj specifične klase integrala oblika

$$f(\lambda) = \int_C g(z) \exp(\lambda h(z)) dz, \quad (\text{B.1})$$

gdje je C neka kontura u kompleksnoj ravni, $g(z)$ i $h(z)$ su analitičke funkcije varijable z u određenoj oblasti kompleksne ravni koja sadrži konturu C , te su nezavisne od λ koje je realan i pozitivan broj. Dakle, problem je naći asimptotsku aproksimaciju ovog integrala u slučaju kada je λ veliko. Jasno, mi posmatramo samo one integrale u (B.1) koji egzistiraju i konačni su. Metod je primjenljiv na opštije forme podintegralne funkcije, npr. kada je $h(z)$ funkcija kako od z tako isto i od λ .

Važno je ponovo naglasiti da funkcije $g(z)$ i $h(z)$ ne moraju biti analitičke u cijeloj kompleksnoj ravni. One mogu imati i izolirane singularitete, uključujući i tačke grananja. Osim toga, birajući da λ bude realno i pozitivno, ne gubimo ništa na opštosti problema. Pretpostavimo da je λ kompleksno. U tom slučaju, ako $\lambda \rightarrow \infty$ duž jedne grane $\lambda = |\lambda| \exp(i\alpha)$, mi jednostavno možemo uključiti $\exp(i\alpha)$ unutar $h(z)$, i tada ponovo imamo integral definisan sa (B.1) u kojemu je odgovarajući parametar realan i pozitivan. Slučaj kada je λ realno i negativno je također uključen, uzimajući da je $\alpha = \pi$. Bez daljnjih ulaženja u detalje problema, vratimo se našem osnovnom cilju: rješavanju integrala (B.1) pod navedenim uslovima koji se odnose na g , h i λ , te na konturu C .

Uzmimo Descartesove koordinate i označimo ih sa x i y . Tada je $z =$

$x + iy$, odnosno

$$h(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y). \quad (\text{B.2})$$

Relativni maksimum od ϕ je postignut u tački kompleksne ravni $z_0 = x_0 + iy_0$, koja ujedno predstavlja rješenje jednačine

$$\nabla\phi = \mathbf{0}, \quad (\text{B.3})$$

gdje je ∇ operator gradijenta koji je u ovom slučaju predstavljen sa $\mathbf{i}\partial/\partial x + \mathbf{j}\partial/\partial y$, a sa $\mathbf{i}$ i $\mathbf{j}$ su označeni jedinični vektori u x i y pravcu. Kako ϕ i ψ čine realni, odnosno imaginarni dio funkcije $h(z)$, koja je analitička funkcija varijable z , to ove dvije funkcije zadovoljavaju Cauchy-Riemannove jednačine

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (\text{B.4})$$

Kako je z_0 također rješenje jednačine

$$\nabla\psi = \mathbf{0}, \quad (\text{B.5})$$

otuda imamo da je

$$h'(z) = \phi_x + i\psi_x = \phi_x - i\phi_y = 0, \quad (\text{B.6})$$

kada je $z = z_0 = x_0 + iy_0$. Radi jednostavnosti smo u gornjem izrazu pisali $\partial\phi/\partial x$ u formi ϕ_x . Pošto vrijede relacije (B.4), ili mnogo općenitije, kako vrijedi (B.2), ϕ i ψ su potencijalne funkcije koje zadovoljavaju Laplaceovu jednačinu

$$\Delta\phi = 0, \quad \Delta\psi = 0, \quad (\text{B.7})$$

gdje je Δ Laplaceov operator ili laplasijan, koji je u ovom slučaju dat sa $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Međutim, prema teoremu o maksimalnom modulu, funkcije ϕ i ψ ne mogu imati maksimum (minimum) u oblasti analitičnosti funkcije $h(z)$. Otuda slijedi da je tačka z_0 sedlasta tačka ovih dviju funkcija ϕ i ψ . Na osnovu (B.6) kažemo da je z_0 sedlasta tačka i funkcije $h(z)$. U našem slučaju interesuje nas sedlasta tačka prvog reda, te u tom slučaju vrijedi

$$h'(z_0) = 0, \quad h''(z_0) \neq 0. \quad (\text{B.8})$$

Procedura koja uključuje sedlaste tačke višeg reda je bazirana na proširenju metode koju ćemo sada izložiti. Na trenutak razmotrimo otkuda potiče naziv metod najbržeg spuštanja. Želimo formirati konturu koja će odgovarati optimalnom putu. Da bi izbjegli probleme oko oscilacija funkcije $\exp(i\lambda\psi)$,

biramo takav put duž kojeg je $\psi = \text{Im } h(z) = \text{const}$. Iz Cauchy-Riemannovih jednačina, a kako je $\nabla\phi \times \nabla\psi = 0$, linije $\phi = \text{const}$. i $\psi = \text{const}$. su međusobno ortogonalne. Linije duž kojih se funkcija ϕ mijenja najbrže, a to su linije određene pravcem $\nabla\phi$, su upravo linije $\psi = \text{const}$. Ako izaberemo ψ -liniju koja prolazi kroz tačku z_0 , gdje funkcija ϕ ima sedlastu tačku, onda prilikom ovog izbora moraju biti ispunjeni sljedeći uslovi:

- i) duž izabranog optimalnog puta funkcija ϕ ima što je moguće veću promjenu u blizini svog relativnog maksimuma, i
- ii) da ne postoje doprinosi koji potiču od oscilacija $\exp(i\lambda\psi)$.

Bitno je napomenuti da postoje dvije linije $\psi = \text{const}$. koje prolaze kroz sedlastu tačku S pri z_0 i pri tome se u oba slučaja funkcija ϕ mijenja što je moguće brže. Upravo zbog toga treba obratiti posebnu pažnju pri selekciji odgovarajuće linije, tj. optimalnog puta kojim se krećemo. Naime, jedna od linija zaista odgovara putu najbržeg spuštanja, dok druga linija odgovara putu najbržeg penjanja. Za pravilan izbor puta najbržeg spuštanja neophodno je odabrati odgovarajuću fazu α koja se pojavljuje u formalizmu koji ćemo upravo iznijeti. U blizini sedlaste tačke z_0 , definisane sa (B.8), dakle tačke u kojoj vrijedi $h'(z_0) = 0$, možemo razviti funkciju $h(z)$ u Taylorov red

$$h(z) = h(z_0) + \frac{1}{2}(z - z_0)^2 h''(z_0) + \mathcal{O}((z - z_0)^3). \quad (\text{B.9})$$

S druge strane, birajući konturu koja odgovara putu najbržeg spuštanja, na i u okolini tačke z_0 vrijedi

$$\phi - \phi_0 = h(z) - h(z_0) = \frac{1}{2}(z - z_0)^2 h''(z_0) < 0. \quad (\text{B.10})$$

Gornji izraz je realan, pošto se imaginarni dijelovi $h(z)$ i $h(z_0)$ međusobno poništavaju na optimalnom putu (putu najbržeg spuštanja), tj. $\psi = \psi_0$. Uvedimo sada novu, jasno, realnu varijablu τ na sljedeći način

$$h(z) - h(z_0) = -\tau^2, \quad (\text{B.11})$$

čime određujemo z kao funkciju τ , tj. $z = z(\tau)$. Integral (B.1) sada postaje

$$f(\lambda) \sim \exp(\lambda h(z_0)) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\lambda\tau^2) g(z(\tau)) \frac{dz}{d\tau} d\tau. \quad (\text{B.12})$$

Iz relacije (B.11), koristeći razvoj (B.9) dobijemo

$$\frac{1}{2}(z - z_0)^2 h''(z_0) + \mathcal{O}((z - z_0)^3) = -\tau^2, \quad (\text{B.13})$$

odnosno

$$z - z_0 = \left\{ \frac{-2}{h''(z_0)} \right\}^{\frac{1}{2}} \tau + \mathcal{O}(\tau^2). \quad (\text{B.14})$$

Još jednom naglasimo da, kako je $h''(z_0)$ kompleksno, to je neophodno izabrati pogodnu granu od $\{-1/h''(z_0)\}^{1/2}$, koja odgovara optimalnom putu. Da bi ovaj postupak privedi kraju potrebno je izvršiti i razvoj $g(z(\tau))$

$$\begin{aligned} g(z(\tau)) &= g(z_0) + (z - z_0)g'(z_0) + \dots \\ &= g(z_0) + g'(z_0) \left\{ \frac{-2}{h''(z_0)} \right\}^{\frac{1}{2}} \tau + \mathcal{O}(\tau^2). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Koristeći (B.12), (B.14) i (B.15) možemo pisati

$$f(\lambda) \sim \exp(\lambda h(z_0))g(z_0) \left\{ \frac{-2}{h''(z_0)} \right\}^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\lambda \tau^2) d\tau + \dots, \quad (\text{B.16})$$

odnosno, rješavajući preostali integral po τ , dobijemo

$$f(\lambda) \sim g(z_0) \left\{ \frac{-2\pi}{\lambda h''(z_0)} \right\}^{\frac{1}{2}} \exp(\lambda h(z_0)). \quad (\text{B.17})$$

Pretpostavimo da je specifična grana od $\{-1/h''(z_0)\}^{1/2}$ data sa

$$\{h''(z_0)\}^{-\frac{1}{2}} = |h''(z_0)|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}i\alpha\right), \quad (\text{B.18})$$

tada (B.17) možemo zabilježiti u sljedećoj formi

$$f(\lambda) \sim \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} |h''(z_0)|^{-\frac{1}{2}} g(z_0) \exp[\lambda h(z_0) + (i/2)(\pi - \alpha)]. \quad (\text{B.19})$$

Upravo ovu proceduru koja vodi ka jednačini (B.19) primjenjujemo u našem slučaju rješavanja petodimenzionalnog integrala koji se javlja u amplitudi vjerovatnosti (5.1) koja opisuje detekciju ATI elektrona sa energijom $E_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/2$.

Bibliografija

- [1] M. Göpert-Meier, Ann. Phys. **9**, 273 (1931).
- [2] J. S. Voronov i N. B. Delone, Sov. Phys. JETP **23**, 54 (1966).
- [3] P. Agostini, G. Barjot, J. F. Bonnal, G. Mainfray i C. Manus, IEEE J. Quantum Electron. **4**, 677 (1968).
- [4] P. Agostini, F. Fabre, G. Mainfray, G. Petite i N. K. Rahman, Phys. Rev. Lett. **42**, 1127 (1979).
- [5] Y. Gontier i M. Trahin, J. Phys. B **13**, 4381 (1980).
- [6] P. Kruit, J. Kimman, H. G. Muller i M. J. van der Wiel, J. Phys. B **14**, L597 (1981).
- [7] F. Fabre, P. Agostini, G. Petit i M. Clement, J. Phys. B **14**, L677 (1981).
- [8] Y. Gontier i M. Trahin, J. Phys. B **13**, 4383 (1980).
- [9] P. Kruit, J. Kimman, H. G. Muller i M. J. van der Wiel, Phys. Rev. A **28**, 248 (1983).
- [10] D. Milošević, magistarski rad, Univerzitet u Beogradu, 1986.
- [11] M. H. Mittleman, *Theory of Laser-Atom Interactions* (Plenum Press, New York, 1993).
- [12] J. H. Eberly, J. Javanainen i K. Rzążewski, Phys. Rep. **204**, 331 (1991).
- [13] A. L'Huillier, Ph. Balcou, S. Candel, K. J. Schafer i K. C. Kulander, Phys. Rev. A **46**, 2778 (1992).
- [14] M. Protopapas, C. H. Keitel i P. L. Knight, Reg. Prog. Phys. **60**, 389 (1997).

- [15] L. F. DiMauro i P. Agostini, *Adv. At., Mol., Opt. Phys.* **35**, 79 (1995).
- [16] A. Gazibegović-Busuladžić, magistarski rad, Univerzitet u Tuzli, 2005.
- [17] H. Feshbach i D. R. Yennie, *Nucl. Phys.* **37**, 150 (1962).
- [18] A. Weingartshofer, J. K. Holmes, G. Caudle, E. Clarke i H. Krüger, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 269 (1977).
- [19] A. Weingartshofer, E. Clarke, J. K. Holmes i C. Jung, *Phys. Rev. A* **19**, 2371 (1979).
- [20] A. Weingartshofer, J. K. Holmes, J. Sabbagh i S. L. Chin, *J. Phys. B* **16**, 1805 (1983).
- [21] A. Weingartshofer i C. Jung (1984). U knjizi S. L. Chin i P. Lambropoulos, *Multiphoton Ionization of Atoms* (Academic Press, New York), str. 155.
- [22] F. V. Bunkin i M. V. Fedorov, *Zh. Éksp. Teor. Fiz.* **49**, 1215 (1965) [*Sov. Phys. JETP* **22**, 844 (1965)].
- [23] N. M. Kroll i K. M. Watson, *Phys. Rev. A* **8**, 804 (1973).
- [24] A. Čerkić i D. B. Milošević, *Phys. Rev. A* **70**, 053402 (2004).
- [25] A. Čerkić i D. B. Milošević, *Laser Phys.* **15**, 268 (2005).
- [26] B. W. Shore i P. L. Knight, *J. Phys. B* **20**, 413 (1987).
- [27] A. McPherson, G. Gibson, H. Jara, U. Johann, T. S. Luk, I. McIntyre, K. Boyer i K. C. Rhodes, *J. Opt. Soc. Am. B* **4**, 495 (1987).
- [28] S. Odžak i D. B. Milošević, *Phys. Rev. A* **72**, 033407 (2005).
- [29] M. Lewenstein, Ph. Balcou, M. Yu. Ivanov, A. L'Huillier i P. B. Corkum, *Phys. Rev. A* **49**, 2117 (1994).
- [30] D. B. Milošević, *J. Phys. B* **33**, 2479 (2000).
- [31] P. B. Corkum, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1994 (1993).
- [32] P. Salières, A. L'Huillier, Ph. Antoine i M. Lewenstein, *Adv. At., Mol., Opt. Phys.* **41**, 83 (1999).
- [33] G. H. C. New i J. F. Ward, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 556 (1967).

- [34] X. M. Tong i S. I. Chu, Phys. Rev. A **57**, 452 (1998).
- [35] A. K. Roy i S. I. Chu, Phys. Rev. A **65**, 043402 (2002).
- [36] M. Brewczyk i K. Rzążewski, J. Phys. B **34**, L289 (2001).
- [37] R. M. Potvliege i R. Shakeshaft, Phys. Rev. A **40**, 3061 (1989).
- [38] K. C. Kulander, Phys. Rev. A **35**, R445 (1987).
- [39] A. L'Huillier, M. Lewenstein, P. Salières, Ph. Balcou, M. Yu. Ivanov, J. Larsson i C. G. Wahlström, Phys. Rev. A **48**, R3433 (1993).
- [40] W. Becker, S. Long, i J. K. McIver, Phys. Rev. A **41**, 4112 (1990).
- [41] W. Becker, S. Long, i J. K. McIver, Phys. Rev. A **50**, 1540 (1994).
- [42] F. Ehlotzky, Nuovo Cimento D **14**, 517 (1992).
- [43] W. Becker, A. Lohr, M. Kleber i M. Lewenstein, Phys. Rev. A **56**, 645 (1997).
- [44] M. Yu. Kuchiev i V. N. Ostrovsky, J. Phys. B **32**, L189 (1999).
- [45] J. Gao, F. Shen i J. G. Eden, Phys. Rev. Lett. **81**, 1833 (1998).
- [46] D. B. Milošević i F. Ehlotzky, Adv. At., Mol., Opt. Phys. **49**, 373 (2003).
- [47] P. Salières, B. Carré, L. Le Déroff, F. Grasbon, G. G. Paulus, H. Walther, R. Kopold, W. Becker, D. B. Milošević, A. Sanpera i M. Lewenstein, Science **292**, 902 (2001).
- [48] R. Kopold, D. B. Milošević i W. Becker, Phys. Rev. Lett **84**, 3831 (2000).
- [49] C. Figueira de Morisson Faria, D. B. Milošević i G. G. Paulus, Phys. Rev. A **61**, 063415 (2000).
- [50] D. B. Milošević, W. Becker i R. Kopold, Phys. Rev. A **61**, 063403 (2000).
- [51] D. B. Milošević i W. Becker, Phys. Rev. A **66**, 063417 (2002).
- [52] D. Descamps, L. Roos, C. Delfin, A. L'Huillier i C. G. Wahlström, Phys. Rev. A **64**, 031404(R) (2001).

- [53] M. Schnürer, Ch. Streli, P. Wobrauschek, M. Hentschel, R. Kienberger, Ch. Spielmann i F. Krausz, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3392 (2000).
- [54] P. Salières, L. Le Déroff, T. Auguste, P. Monot, P. d'Oliveira, D. Campo, J. F. Hergott, H. Merdji i B. Carré, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5483 (1999).
- [55] A. Zewail, *Nobel Lectures in Chemistry* 1996-2000, edited by I. Grenthe (World Scientific, Singapore, 2003).
- [56] A. L'Huillier, L. A. Lompre, G. Mainfray i C. Manus, *Phys. Rev. A* **27**, 2503 (1983).
- [57] T. Weber, M. Weckenbrock, A. Staudte, L. Spielberger, O. Jagutzki, V. Mergel, F. Afaneh, G. Urbasch, M. Vollmer, H. Giessen i R. Dörner, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 443 (2000).
- [58] R. Moshhammer, B. Feuerstein, W. Schmitt, A. Dorn, C. D. Schröter, J. Ullrich, H. Rottke, C. Trump, M. Wittmann, G. Korn, K. Hoffmann i W. Sandner, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 447 (2000).
- [59] G. D. Gillen, M. A. Walker i L. D. van Woerkom, *Phys. Rev. A* **64**, 043413 (2001).
- [60] R. Dörner, T. Weber, M. Weckenbrock, A. Staudte, M. Hattass, H. Schmidt-Böcking, R. Moshhammer i J. Ullrich, *Adv. At., Mol., Opt. Phys.* **48**, 1 (2002).
- [61] D. B. Milošević i W. Becker, *Phys. Rev. A* **68**, 0654 (2003).
- [62] A. Becker i F. H. M. Faisal, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3546 (2000).
- [63] R. Moshhammer, J. Ullrich, B. Feuerstein, D. Fischer, A. Dorn, C. D. Schröter, J. R. Crespo Lopez-Urrutia, C. Höhr, H. Rottke, C. Trump, M. Wittmann, G. Korn, K. Hoffmann i W. Sandner, *J. Phys. B* **36**, L113 (2003).
- [64] B. Feuerstein, R. Moshhammer, D. Fischer, A. Dorn, C. D. Schröter, J. Deipenwisch, J. R. Crespo Lopez-Urrutia, C. Höhr, P. Neumayer, J. Ullrich, H. Rottke, C. Trump, M. Wittmann, G. Korn i W. Sandner, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 043003 (2001).
- [65] M. Yu. Kuchiev, *J. Phys. B* **28**, 5093 (1995).
- [66] A. Becker i F. H. M. Faisal, *J. Phys. B* **29**, L197 (1996).

-
- [67] R. Kopold, W. Becker, H. Rottke i W. Sandner, Phys. Rev. Lett. **85**, 3781 (2000).
- [68] S. P. Goreslavskii, S. V. Popruzhenko, R. Kopold i W. Becker, Phys. Rev. A **64**, 053402 (2001).
- [69] C. Figueira de Morisson Faria i W. Becker, Laser Phys. **13**, 1196 (2003).
- [70] V. R. Bhardway, S. A. Aseyev, M. Mehendale, G. L. Yudin, D. M. Villeneuve, D. M. Rayner, M. Yu. Ivanov i P. B. Corkum, Phys. Rev. Lett. **86**, 3522 (2000).
- [71] G. L. Yudin i M. Yu. Ivanov, Phys. Rev. A **63**, 033404 (2001).
- [72] S. V. Popruzhenko, Ph. A. Korneev, S. P. Goreslavskii i W. Becker, Phys. Rev. Lett. **89**, 023001 (2002).
- [73] A. Jaroń, J. Z. Kamiński i F. Ehlotzky, Phys. Rev. A **61**, 023404 (2000).
- [74] A. Jaroń, J. Z. Kamiński i F. Ehlotzky, Laser Phys. **11**, 174 (2001).
- [75] D. B. Milošević i F. Ehlotzky, Phys. Rev. A **65**, 042504 (2002).
- [76] D. B. Milošević i F. Ehlotzky, J. Mod. Opt. **50**, 657 (2003).
- [77] Z. Chang, A. Rundquist, H. Wang, M. M. Murnane i H. C. Kapteyn, Phys. Rev. Lett. **79**, 2967 (1997).
- [78] C. Spielmann, N. H. Burnett, S. Sartania, R. Koppitsch, M. Shnürer, C. Kan, M. Lenzner, P. Wobrauschek i F. Krausz, Science **278**, 661 (1997).
- [79] T. E. Glover, R. W. Schoenlein, A. H. Chin i C. V. Shank, Phys. Rev. Lett. **76**, 2468 (1996).
- [80] C. D. Decker i R. A. London, Phys. Rev. A **57**, 1395 (1998).
- [81] D. B. Milošević i F. Ehlotzky, Phys. Rev. A **57**, 2859 (1998).
- [82] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light* (Clarendon, Oxford, 1983).
- [83] M. Gavril, Phys. Rev. A **163**, 147 (1967).
- [84] J. S. Levinger, Phys. Rev. A **87**, 656 (1952).
- [85] F. Parente, J. Phys. B **16**, 3487 (1983).

- [86] F. Ehlotzky, Opt. Commun. **25**, 221 (1978).
- [87] F. Ehlotzky, Phys. Lett. **69A**, 24 (1978).
- [88] F. Ehlotzky, J. Phys. B **22**, 601 (1989).
- [89] P. Kálmán, Phys. Rev. A **38**, 5458 (1988).
- [90] P. Kálmán, Phys. Rev. A **39**, 2428 (1989).
- [91] P. Kálmán, F. Krausz i E. Wintner, Phys. Rev. A **47**, 729 (1993).
- [92] F. Ehlotzky, A. Jaroń i J. Z. Kamiński, Phys. Rep. **297**, 63 (1998).
- [93] D. B. Milošević i F. Ehlotzky, Phys. Rev. A **57**, 5002 (1998).
- [94] D. B. Milošević i A. F. Starace, J. Phys. B **32**, 1831 (1999).
- [95] D. B. Milošević i A. F. Starace, Phys. Rev. Lett. **81**, 5097 (1998).
- [96] D. B. Milošević i A. F. Starace, Phys. Rev. A **60**, 3943 (1999).
- [97] D. E. Spence, P. N. Kean i W. Sibbett, Opt. Lett. **16**, 42 (1991).
- [98] M. Nisoli, S. Silvestri, O. Svelto, R. Szipöcs, K. Ferencz, Ch. Spielmann, S. Sartania i F. Krausz, Opt. Lett. **22**, 522 (1997).
- [99] F. Lindner, G. G. Paulus, F. Grasbon, A. Dreischuh i H. Walther, IEEE J. Quantum Electron. **38**, 1465 (2002).
- [100] C. Bordas, F. Paulig, H. Helm i D. L. Huestis, Rev. Sci. Instrum. **67**, 2257 (1996).
- [101] R. Dörner, V. Mergel, O. Jagutzki, L. Spielberger, J. Ullrich, R. Moshammer i H. Schmidt-Böcking, Phys. Rep. **330**, 96 (2000).
- [102] M. V. Ammosov, N. B. Delone i V. P. Krainov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **91**, 2008 (1986) [Sov. Phys. JETP **64**, 1191].
- [103] P. H. Bucksbaum, M. Bashkansky, R.R. Freeman, T. J. McIlrath i L. F. DiMauro, Phys. Rev. Lett. **56**, 2590 (1986).
- [104] U. Mohideen, M. H. Sher, H. W. K. Tom, G. D. Aumiller, O. R. Wood II, R. R. Freeman, J. Bokor i P. H. Bucksbaum, Phys. Rev. Lett. **71**, 509 (1993).
- [105] F. Ehlotzky, Phys. Rep. **345**, 175 (2001).

- [106] G. G. Paulus, F. Zacher, H. Walther, A. Lohr, W. Becker i M. Kleber, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 484 (1998).
- [107] W. Becker, R. R. Schlicher, M. O. Scully i K. Wódkiewicz, *J. Opt. Soc. Am. B* **4**, 743 (1987).
- [108] H. G. Muller, A. Tip i M. J. van der Wiel, *J. Phys. B* **16**, L679 (1983).
- [109] P. H. Bucksbaum, M. Bashkansky i T. J. McIlrath, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 349 (1987).
- [110] G. G. Paulus, W. Becker, W. Nicklich i H. Walther, *J. Phys. B* **27**, L703 (1994).
- [111] M. Lewenstein, K. C. Kulander, K. J. Schafer i P. H. Bucksbaum, *Phys. Rev. A* **51**, 1495 (1995).
- [112] B. Yang, K. J. Schafer, B. Walker, K. C. Kulander, P. Agostini i L. F. DiMauro, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3770 (1993).
- [113] G. G. Paulus, W. Nicklich, H. Xu, P. Lambropoulos i H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2851 (1994).
- [114] G. G. Paulus, W. Becker i H. Walther, *Phys. Rev. A* **52**, 4043 (1995).
- [115] B. Sheehy, R. Lafon, M. Widmer, B. Walker, L. F. DiMauro, P. A. Agostini i K. C. Kulander, *Phys. Rev. A* **58**, 3942 (1998).
- [116] M. J. Nandor, M. A. Walker i L. D. van Woerkom, *J. Phys. B* **31**, 4617 (1998).
- [117] R. R. Freeman, P. H. Bucksbaum, H. Milchberg, S. Darack, D. Schumacher i M. E. Geusic, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1092 (1987).
- [118] W. Becker, F. Grasbon, R. Kopold, D. B. Milošević, G. G. Paulus i H. Walther, *Adv. At., Mol., Opt. Phys.* **48**, 35 (2002).
- [119] D. B. Milošević i F. Ehlotzky, *Phys. Rev. A* **58**, 3124 (1998).
- [120] L. V. Keldysh, *Zh. Éksp. Teor. Fiz.* **47**, 1945 (1964) [*Sov. Phys. JETP* **20**, 1307 (1965)].
- [121] A. M. Perelomov, V. S. Popov i M. V. Terent'ev, *Zh. Éksp. Teor. Fiz.* **50**, 1393 (1966) [*Sov. Phys. JETP* **23**, 924 (1966)].

- [122] A. M. Perelomov, V. S. Popov i M. V. Terent'ev, Zh. Éksp. Teor. Fiz. **51**, 309 (1966) [Sov. Phys. JETP **24**, 207 (1966)].
- [123] F. H. M. Faisal, J. Phys. B **6**, L89 (1973).
- [124] H. R. Reiss, Phys. Rev. A **22**, 1786 (1980).
- [125] A. M. Dykhne, Zh. Éksp. Teor. Fiz. **38**, 570 (1960) [Sov. Phys. JETP **11**, 411 (1960)].
- [126] E. H. Hauge i J. A. Støvneng, Rev. Mod. Phys **59**, 917 (1989).
- [127] A. Raczyński i J. Zaremba, Phys. Lett. A **232**, 428 (1997).
- [128] W. Becker, M. Kleber, A. Lohr, G. G. Paulus, H. Walther i F. Zacher, Laser Phys. **8**, 56 (1998).
- [129] A. Lohr, M. Kleber, R. Kopold i W. Becker, Phys. Rev. A **55**, R4003 (1997).
- [130] R. Kopold, W. Becker i M. Kleber, Opt. Commun. **179**, 39 (2000).
- [131] G. van de Sand i J. M. Rost, Phys. Rev. A **62**, 053403 (2000).
- [132] S. P. Goreslavskii i S. V. Popruzhenko, Zh. Éksp. Teor. Fiz. **117**, 895 (2000) [Sov. Phys. JETP **90**, 778 (2000)].
- [133] B. Walker, B. Sheehy, K. C. Kulander i L. F. DiMauro, Phys. Rev. Lett. **77**, 5031 (1996).
- [134] C. Figueira de Morisson Faria, H. Schomerus i W. Becker, Phys. Rev. A **66**, 043413 (2002).
- [135] R. Kopold i W. Becker, J. Phys. B **32**, L419 (1999).
- [136] D. B. Milošević i F. Ehlotzky, J. Phys. B **31**, 4149 (1998).
- [137] A. A. Radzig i B. M. Smirnov, *Reference Data on Atoms, Molecules and Ions* (Springer, Berlin, 1985).
- [138] D. B. Milošević i F. Ehlotzky, J. Phys. B **32**, 1585 (1999).
- [139] G. G. Paulus, F. Grasbon, A. Dreischuh, H. Walther, R. Kopold i W. Becker, Phys. Rev. Lett. **84**, 3791 (2000).
- [140] M. Busuladžić, A. Gazibegović-Busuladžić i D. B. Milošević, Laser Phys. **16**, 289 (2006).

-
- [141] D. B. Milošević i A. F. Starace, *Laser Phys.* **66**, 278 (2000).
- [142] A. V. Flegel, M. V. Frolov, N. L. Manakov i A. F. Starace, *J. Phys. B* **38**, L27 (2005).
- [143] D. B. Milošević i B. Piraux, *Phys. Rev. A* **54**, 1522 (1996).
- [144] D. Bauer, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 113001 (2005).
- [145] D. B. Milošević, D. Bauer i W. Becker, *J. Mod. Opt.* **53**, 125 (2006).
- [146] E. Hasović, M. Busuladžić, A. Gazibegović-Busuladžić, D. B. Milošević i W. Becker, *Laser Phys.* **17**, 376 (2007).
- [147] D. B. Milošević, G. G. Paulus i W. Becker, *J. Phys. B* **39**, 203 (2006).
- [148] J. I. Khan, M. Kling, Y. Ni i M. J. J. Vrakking, (AMOLF Report, 2006).
- [149] P. Hansch, M. A. Walker i L. D. van Woerkom, *Phys. Rev. A* **55**, R2535 (1997).
- [150] M. P. Hertlein, P. H. Bucksbaum i H. G. Muller, *J. Phys. B* **30**, L197 (1997).
- [151] H. G. Muller, *Phys. Rev. A* **60**, 1341 (1999).
- [152] H. G. Muller, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3158 (1999).
- [153] R. Kopold, W. Becker, M. Kleber i G. G. Paulus, *J. Phys. B* **35**, 217 (2002).
- [154] N. L. Manakov and M. V. Frolov, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **83**, 630 (2006) [*JETP Lett.* **83**, 536 (2006)].
- [155] K. Krajewska, I. I. Fabrikant, and A. F. Starace, *Phys. Rev. A* **74**, 053407 (2006).
- [156] G. G. Paulus, *Physica Scripta* **110**, 120 (2004).
- [157] P. Agostini, A. Antonetti, P. Breger, M. Crance, A. Migus, H. G. Muller i G. Petite, *J. Phys. B* **22**, 1971 (1989).
- [158] K. Bartschat (ed.), *Computational Atomic Physics. Electron and Positron Collisions with Atoms and Ions* (Springer, Berlin, 1996).
- [159] J. E. Purcell, R. A. Berg i A. E. S. Green, *Phys. Rev. A* **2**, 107 (1970).

- [160] R. A. Berg, J. E. Purcell i A. E. S. Green, Phys. Rev. A **3**, 508 (1971).
- [161] A. E. S. Green, D. L. Sellin i A. S. Zachor, Phys. Rev. **184**, 1 (1969).
- [162] A. E. S. Green, D. E. Rio i T. Ueda, Phys. Rev. A **24**, 3010 (1981).

Sažetak rada

U radu "Jonizacija atoma jakim laserskim poljem" je analiziran uticaj jonizacionog potencijala na zakon odsijecanja spektra elektrona jonizovanih u procesu jonizacije iznad praga višeg reda. Pri tome je pokazano da se do sada poznati zakon odsijecanja, otkriven 1994. godine, prema kojem je maksimalna energija jonizovanih elektrona jednaka $10.007 U_P$, gdje je U_P ponderomotorna energija elektrona u laserskom polju, treba dopuniti članom $0.538 I_P$, gdje je I_P energija jonizacije atoma. Dobijeni rezultat je potvrđen poređenjem sa numeričkim rezultatima i sa eksperimentom.

Dio ovog magistarskog rada je posvećen analizi procesa jonizacije iznad praga primjenom metoda sedlaste tačke. Uvedena je klasifikacija sedlastih tačaka koja je usko povezana sa kvantnim orbitama. Dobijeni rezultati su upoređeni sa rezultatima preciznijih numeričkih proračuna. I ovom metodom je potvrđena opravdanost uvođenja I_P -korekcije u pomenutom zakonu odsijecanja. Uvedena je i uniformna aproksimacija koja je omogućila uklanjanje problema koji se pojavljuju pri primjeni metoda sedlaste tačke za energije elektrona koje su bliske cutoffu za pojedine parove kvantnih orbita. Izložena teorija je omogućila analizu ponašanja zakona odsijecanja sa promjenom ugla emitovanih elektrona u odnosu na smjer polarizacije laserskog polja.

U ovome radu su predstavljani i rezultati numeričke simulacije nedavno izvršenih eksperimenata jonizacije iznad praga višeg reda. Da bi postigli što realističniji model za simulaciju eksperimenta, pored odgovarajućeg izbora početne valne funkcije i potencijala rasijanja, posebnu pažnju smo posvetili fokalnom usrednjavanju. Pri tome su korišteni programi razvijeni na Katetri za atomsku, molekularnu i optičku fiziku, Odsjeka za fiziku, Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu. Uočeno je da efekat zatvaranja određenih kanala jonizacije dovodi do pojačanja dijelova spektra jonizovanih elektrona koje je posebno izraženo pri tačno određenim intenzitetima laserskog polja. Takvo pojačanje je zapaženo i u eksperimentima. U ovom radu to pojačanje je objašnjeno primjenom metoda kvantnih orbita. Konkretno, nađeno je da je uzrok pojačanja konstruktivna interferencija velikog broja kvantnih orbita.

Summary

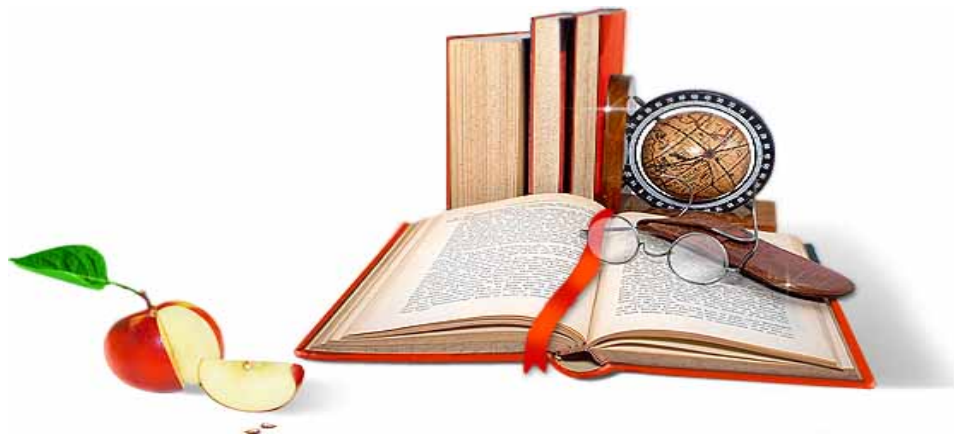
In the master thesis “Ionization of atoms by a strong laser field” has been analyzed influence of ionization potential on cutoff law of the high-energy electron spectra. It has been shown that well-known classical cutoff law $10.007 U_P$, discovered in 1994, have to be modified by adding the new term $0.538 I_P$ related to atom ionization potential. Validity of this result is confirmed by comparison with the numerical results and ATI experiment characterized with good energy resolution near the cutoff.

In a part of this thesis of HATI process is analyzed by saddle-point method. A classification of the mentioned method solutions is introduced and is related to quantum orbits. Our results are compared with more precise numerical calculation. We used uniform approximation, mathematically more rigorous way, to avoid problems which occur for electron energies near and beyond cutoff. These problems are related to corresponding pair of quantum orbits. In this thesis we have presented the θ -dependence of the cutoff values for various quantum orbits, where θ is angle between emitted electrons momentum and polarization axis of a laser field.

We also presented results of our simulation of recently performed above-threshold ionization (ATI) experiments. In order to achieve a realistic simulation of such experiments, beside the choice of the initial-state wave function and the rescattering potential, we devoted particular attention to focal averaging method. Numerical programs developed on Department of Physics, Faculty of Science University of Sarajevo were used. It was noticed that the effect of channel closing lead to enhancement of particular groups of ATI peaks, which is significant at certain intensity of laser field. Such enhancement was noticed in the above-mentioned experiments. In this paper enhancement was explained by method of quantum orbits. It was found that cause of enhancement is constructive interference of large number of quantum orbits.

BESPLATNI GOTOVI SEMINARSKI, DIPLOMSKI I MATURSKI RAD.

**RADOVI IZ SVIH OBLASTI, POWERPOINT PREZENTACIJE I DRUGI EDUKATIVNI
MATERIJALI.**



WWW.SEMINARSKIRAD.ORG

WWW.MATURSKIRADOVI.NET

WWW.MATURSKI.NET

WWW.SEMINARSKIRAD.INFO

WWW.MATURSKI.ORG

WWW.ESSAYSX.COM

WWW.FACEBOOK.COM/DIPLOMSKIRADOVI

NA NAŠIM SAJTOVIMA MOŽETE PRONAĆI SVE, BILO DA JE TO [SEMINARSKI](#), [DIPLOMSKI](#) ILI [MATURSKI](#) RAD, POWERPOINT PREZENTACIJA I DRUGI EDUKATIVNI MATERIJAL. ZA RAZLIKU OD OSTALIH MI VAM PRUŽAMO DA POGLEDATE SVAKI RAD, NJEGOV SADRŽAJ I PRVE TRI STRANE TAKO DA MOŽETE TAČNO DA ODABERETE ONO ŠTO VAM U POTPUNOSTI ODGOVARA. U BAZI SE NALAZE [GOTOVI SEMINARSKI, DIPLOMSKI I MATURSKI RADOVI](#) KOJE MOŽETE SKINUTI I UZ NJIHOVU POMOĆ NAPRAVITI JEDINSTVEN I UNIKATAN RAD. AKO U [BAZI](#) NE NAĐETE RAD KOJI VAM JE POTREBAN, U SVAKOM MOMENTU MOŽETE NARUČITI DA VAM SE IZRADI NOVI, UNIKATAN SEMINARSKI ILI NEKI DRUGI RAD RAD NA LINKU [IZRADA RADOVA](#). PITANJA I ODGOVORE MOŽETE DOBITI NA NAŠEM [FORUMU](#) ILI NA MATURSKIRADOVI.NET@GMAIL.COM