



**VISOKA POSLOVNA ŠKOLA
STRUKOVNIH STUDIJA
ČAČAK**

DIPLOMSKI RAD

**Metode diferencijalne geometrij ekrivih u Euklidskom
3D prostoru u software-u Mathematica**

Mentor: _____
Profesor: _____

Student: _____
Br.Indeksa: _____

REZIME:

Cilj diplomskog rada sa ovom temom je upoznavanje sa software-om Mathematica i njegovom primjenom u diferencijalnoj geometriji.

Diplomski rad se sastoji od dva poglavlja.

Prvo poglavlje govori o osnovnim osobinama krivih u 3D Euklidskom prostoru, sa stanovišta diferencijalne geometrije.

U drugom poglavlju se govori o primjeni software-skog paketa *Mathematica* u metodama diferencijalne geometrije krivih u Euklidskom 3D prostoru.

Uz diplomski rad je dat dodatak, u kome su sadržani kodovi opisanih funkcija.

SUMMARY:

The goal of this work for certificate degree is to introduce the software *Mathematica* and its use in differential geometry.

This work for certificate degree consists of two chapters.

The first chapter discusses the basic properties of curves in 3D Euclidean space, from the standpoint of differential geometry.

The second chapter discusses the application of the software *Mathematica* in methods of differential geometry of curves in Euclidean 3D space.

This work for certificate degree contains an appendix with all the code of the described functions.

Sadržaj

1	Krive u Euklidskom 3D prostoru	2
1.1	Vektorski prostor \mathbb{R}^3	2
1.2	Osnovna svojstva krivih	4
1.3	Dužina luka krive	8
1.4	Krivina i torzija	9
1.5	Frenetove formule	13
2	Implementacija metoda diferencijalne geometrije u <i>Mathematica</i>- <i>i</i>	14
2.1	Crtanje grafika krivih u 3D prostoru	14
2.2	Dužina luka	16
2.3	Krivina i torzija	17
2.4	Frenetov trobrid	19
	Literatura	24

Uvod

Krajem XVIII i početkom XIX vijeka znatan broj matematičara razrađuje infintezimalni račun i primenjuje ga na razne probleme iz oblasti prirodnih nauka. Rezultat toga je pojava novih matematičkih disciplina, kao što su diferencijalna geometrija, diferencijalne jednačine, varijacioni račun.

Carl Gauss primenjuje diferencijalni račun na proučavanje krivih linija i površina, i na taj način razrađuje diferencijalnu geometriju. Diferencijalna geometrija bogati se radovima G. Lamea i A. Serea (1819-1885). Tada je bilo moguće proučavati kompliciranije geometrijske objekte, kao što su na primjer proizvoljno zakrivljene “krive” i “površni” u 3D prostoru.

Mathematica je najmoćniji svjetski globalni software-ski paket. Prva verzija je izdana 1988. godine, i imala duboki uticaj na način na koji se računari koriste u tehničkim i drugim područjima.

Često se kaže da je pojava *Mathematica-e* označila početak modernog tehničkog računarstva. Još od 1960-ih postojali su individualni paketi za određene numeričke, algebarske, grafičke i druge poslove. Ali vizionarski koncept *Mathematica* je bilo stvaranje paketa “sve u jednom”. Razvoj *Mathematica-e* je projekat tima Wolfram Research koji vodi od njegova nastanka Stephen Wolfram. Danas se *Mathematica* koristi u prirodnim naukama, ekonomiji i td.

U ovom diplomskom radu ilustrovat ćemo kako *Mathematica* može biti “moćan” aparat pri proučavanju krivih u Euklidskom 3D prostoru.

Prvi dio diplomskog rada bit će posvećen uvođenju krivih u Euklidskom 3D prostoru, sa gledišta diferencijalne geometrije. U tom dijelu uvest ćemo pojam krive, dužine luka, krivine i torzije, kao i pojmove vektora tangente, normale i binormale. Na kraju prvog dijela navest ćemo Frenetove formule.

U drugom dijelu diplomskog rada bit će predstavljena primjena software-a *Mathematica* na crtanje krivih. Također ćemo ponuditi nekoliko funkcija, koje će biti od pomoći pri računanju krivine, torzije, tangentnog vektora, vektora normale i binoramale i njihove vizualizacije, uz objašnjenje kako koja funkcija radi, koji su ulazni parametri, a koji izlazni parametri.

Uz diplomski rad ćemo dati dodatak, koji će sadržavati kodove svih novih funkcija.

1 Krive u Euklidskom 3D prostoru

1.1 Vektorski prostor \mathbb{R}^3

Neka je \mathbb{R}^3 standardni vektorski prostor nad \mathbb{R} dimenzije 3. Elemente od \mathbb{R}^3 zovemo vektori, a elemente od \mathbb{R} skalari.

Ako su $x, y \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}$ pri čemu je $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$, onda su formulama

$$\begin{aligned}x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ \alpha x &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)\end{aligned}$$

date operacije sabiranja vektora i množenja vektora skalarom. Ako je $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ i $e_3 = (0, 0, 1)$, onda je $\{e_1, e_2, e_3\}$ baza od \mathbb{R}^3 pa se svaki $x \in \mathbb{R}^3$ može napisati na jedinstven način u obliku linearne kombinacije $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. Bazu $\{e_1, e_2, e_3\}$ zovemo standardna baza od \mathbb{R}^3 .

Ako su $x, y \in \mathbb{R}^3$ onda definirajmo skalarni produkt (x, y) kao

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

i normu vektora x kao

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Ako je $(x, y) = 0$, onda kažemo da su x i y okomiti ili ortogonalni. Ako je $\|x\| = 1$, onda kažemo da je x normiran vektor. Primijetimo da su bazni vektori e_1, e_2 i e_3 međusobno okomiti i normirani pa kažemo da su ortonormirani, odnosno da čine ortonormiranu bazu od \mathbb{R}^3 .

Neka su $x, y \in \mathbb{R}^3$. Sada možemo definisati vektorski proizvod $x \times y$ na sljedeći način

$$x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1),$$

što se dalje može napisati u obliku determinante

$$x \times y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Ako su $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, tada za njih možemo definisati mješoviti proizvod i to na sljedeći način:

$$[x, y, z] = (x \times y, z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Navedimo sada nekoliko osobina skalarnog, vektorskog i mješovitog proizvoda vektora.

Skalarni proizvod vektora ima sljedeće osobine:

1. Skalarni proizvod je linearan po obje varijable.
2. $(x, y) = (y, x)$
3. $|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$.

Za vektorski proizvod vektora vrijede sljedeće osobine:

1. Vektorski proizvod je linearan po obje varijable.
2. $x \times y = 0$ akko su x i y linearno zavisni
3. $x \times y = -x \times y$ i $x \times x = 0$
4. $(a \times b, x \times y) = (a, x)(b, y) - (a, y)(b, x)$
5. $\|x \times y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - (x, y)^2$
6. $\|x \times y\|$ je jednak površini paralelograma sa stranicama x i y
7. Vektorski proizvod vektora nije asocijativan.

Mješoviti proizvod vektora ima sljedeće osobine:

1. Mješoviti proizvod je linearan po svakoj od varijabli.
2. $[x, y, z] = 0$ akko su x , y i z linearno zavisni vektori.
3. $|[x, y, z]|$ jednak je zapremini paralelepipeda sa ivicama x , y i z .

1.2 Osnovna svojstva krivih

Kriva u prostoru se može shvatiti na više načina. Možemo je zamisliti kao putanju koju pređe tačkasto tijelo za određeni vremenski interval, ili kao oblik koji predstavlja žica u prostoru.

Definicija 1.1 *Kriva je slika jednog glatkog preslikavanja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, gdje je I neki interval.*

Definicija 1.2 *Kriva je regularna ako je $\gamma'(t) \neq 0$ za svako $t \in I$.*

Krive možemo zadati na više načina.

Jedan od njih je da krivu definišemo kao presjek dvije površi, tj. skup

$$C = \{(x, y, z) \mid F_1(x, y, z) = 0 \wedge F_2(x, y, z) = 0\}.$$

Naravno, da bi koristili ovaj način zadavanja krivih, moraju biti ispunjeni određeni uslovi.

Pretpostavimo da

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y} \neq 0,$$

odnosno da je preslikavanje

$$(0, u, v) \mapsto d_{(x,y,z)} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} (0, u, v)$$

inverzno za $(x, y, z) \in C$. Tada po teoremu implicitnog preslikavanja lokalno možemo riješiti jednačinu po x , odnosno

$$C \cap U = \{(x, g_1(x), g_2(x)) \mid -\varepsilon < x < \varepsilon\}$$

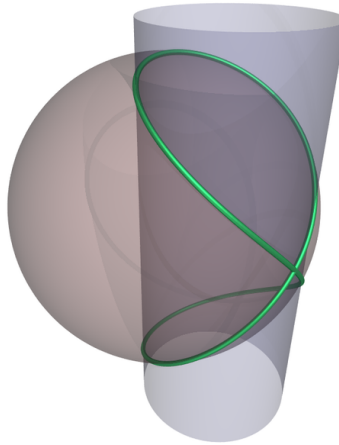
za neku okolinu U tačke (x, y, z) .

Generalnije, C definiše regularnu krivu ukoliko su gradijenti

$$\nabla F_1 = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial y}, \frac{\partial F_1}{\partial z} \right),$$

$$\nabla F_2 = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial y}, \frac{\partial F_2}{\partial z} \right)$$

linearno nezavisni za sve $(x, y, z) \in C$.



Slika 1: Vivianijeva kriva

Primjer 1.1 *Konični presjeci su dati jednačinama:*

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= z^2, \\x \cos \alpha + z \sin \alpha &= d,\end{aligned}$$

gdje su $\alpha, d \in \mathbb{R}, d \neq 0$.

Primjer 1.2 *Kriva koja nastaje presjekom lopte $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ i valjka $x^2 + y^2 = ax$ naziva se Vivianijeva kriva i ona je predstavljena slikom (1).*

Drugi način zadavanja krivih je u parametarskom obliku.

Prava u prostoru je određena njenom jednom tačkom $P(a, b, c)$ i koeficijentima α, β i γ . Posmatrajmo sada bilo koju drugu tačku $P(x, y, z)$ te prave. Tada koordinate tačke P možemo zapisati u obliku:

$$\begin{aligned}x &= a + \alpha \cdot t, \\y &= b + \beta \cdot t, \\z &= c + \gamma \cdot t,\end{aligned} \tag{1}$$

gdje $t \in I$. Vidimo sada da svaka vrijednost od t određuje jednu tačku na toj pravoj i da se koordinate bilo koje tačke mogu izraziti pomoću jednačina (1).

Jednačine (1) zovemo parametarskim jednačinama prave u prostoru, a broj t varijablom ili parametrom.

Posmatrajmo sada:

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\y &= y(t), \\z &= z(t),\end{aligned}\tag{2}$$

gdje su $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$ neke funkcije. Vidjeli smo šta jednačine (2) predstavljaju kada je u pitanju prava. Razmatrajmo sada opšti slučaj kada su funkcije $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$ analitičke za sve vrijednosti parametra t ili bara na konkretnom domenu.

Geometrijsko mjesto tačaka čije su koordinate date jednačinama (2) je kriva. To ćemo zapisivati

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)).\tag{3}$$

Ako sve tačke te krive ne pripadaju istoj ravni, onda je riječ o prostornoj krivoj, a u drugom slučaju je riječ o krivoj u ravni.

Definicija 1.3 *Neka je kriva parametrizirana sa (3) Tada se funkcije $x(t)$, $y(t)$, i $z(t)$ zovu koordinatne funkcije.*

Definicija 1.4 *Za funkciju (3) reći ćemo da je neprekidna (diferencijabilna, glatka, integrabilana) ako je svaka od koordinatnih funkcija neprekidna (diferencijabilna, glatka, integrabilana).*

Definicija 1.5 *Reparametrizacija krive $(a, b) \ni t \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ je nova parametrizirana kriva*

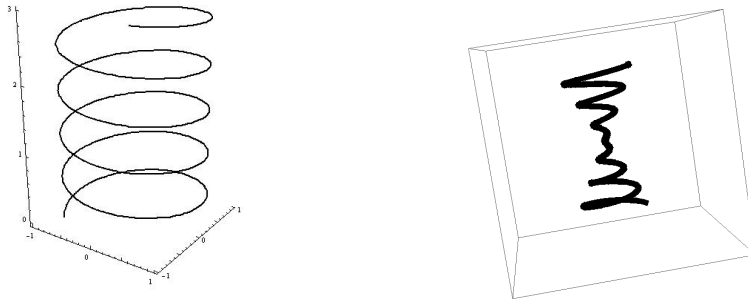
$$\bar{\gamma}(s) = \gamma(u(s)),$$

gdje je $u : (\bar{a}, \bar{b}) \rightarrow (a, b)$ surjektivna i $u' \neq 0$.

Primjer 1.3 *Na slici (2), lijevo, je dat kružni heliks čija je parametrizacija*

$$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, at),$$

gdje je $t \in \mathbb{R}$.



Slika 2: Heliks, lijevo, i sprala, desno

Primjer 1.4 *Parametrizacija krive na slici (1) je data sa:*

$$\gamma(t) = a \left(1 + \cos t, \sin t, 2 \sin \frac{t}{2} \right).$$

Primjer 1.5 *Parametarska jednačina spirale je :*

$$\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t, at),$$

a prikazana je slikom (2), desno.

1.3 Dužina luka krive

Ako krivu posmatramo kao putanju koju pređe tačkasto tijelo za određeni vremenski interval, onda se može postaviti pitanja kolika je dužina puta koji je tijelo prešlo?

Definicija 1.6 Dužina luka krive $t \mapsto \gamma(t)$ na nekom segmentu $[t_0, t_1]$ je

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt. \quad (4)$$

Dužina luka krive ne zavisi od parametrizacije te krive.

Lema 1.1 Svaka regularna kriva $t \mapsto \gamma(t)$ može biti reparametrizirana pomoću dužine luka, tj. tako da ima konstantnu brzinu 1.

Definicija 1.7 Reparametrizaciju iz prethodne leme zovemo parametrizacijom dužinom luka krive γ i obično je označavamo sa $s \mapsto \gamma(s)$

Primjer 1.6 U primjeru 1.3 je data parametrizacija kružnog heliksa. Sada imamo da je dužina luka između tačke 0 i tačke t data sa

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{r^2 + a^2} dt = \sqrt{r^2 + a^2} \cdot t,$$

a parametrizacija dužinom luka je

$$\begin{aligned} x(s) &= r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + a^2}}, \\ y(s) &= r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + a^2}}, \\ z(s) &= \frac{s \cdot a}{\sqrt{r^2 + a^2}}. \end{aligned}$$

Primjer 1.7 Neka treba naći dužinu luka krive $\gamma(t) = (\sin^2 t, \sin t \cos t, \ln \cos t)$ od tačke $t = 0$ do tačke $t = t$. Tada imamo da je

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{\sin^2 2t + \cos^2 2t + \tan^2 t} dt = \int_0^t \frac{1}{\cos t} dt \\ &= \ln \tan \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

1.4 Krivina i torzija

Ako posmatramo krivu kao putanju tačkastog tijela, koje se kreće stalnom brzinom, onda je korisno da opišemo pravac kretanja, kao i položaj tijela u prostoru.

Neka ja $\gamma = \gamma(s)$ parametrizovana kriva. Tada je

Definicija 1.8 Vektor $\vec{T}(s) = \frac{\vec{\gamma}'(s)}{|\vec{\gamma}'(s)|}$ zove se jedinični vektor tangente.

Kako je $\vec{T}(s)$ jedinični vektor, to je $\vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s) = 1$ za svako s . Iz toga slijedi da je

$$\frac{d}{ds} (\vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s)) = 2 \frac{d}{ds} (\vec{T}(s)) \cdot \vec{T}(s) = 0$$

pa zaključujemo da su vektori $\vec{T}(s)$ i $\vec{T}'(s)$ ortogonalni.

Definicija 1.9 Vektor

$$\vec{N}(s) = \frac{\vec{T}'(s)}{|\vec{T}'(s)|}$$

naziva se jedinični vektor normale krive γ .

Za proizvoljnu vrijednost prirodnog parametra s možemo uvesti vektor

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s).$$

Budući da su vektori $\vec{T}(s)$ i $\vec{N}(s)$ jedinični i ortogonalni, to je i vektor $\vec{B}(s)$ jediničan i ortogonalan na vektore $\vec{T}(s)$ i $\vec{N}(s)$.

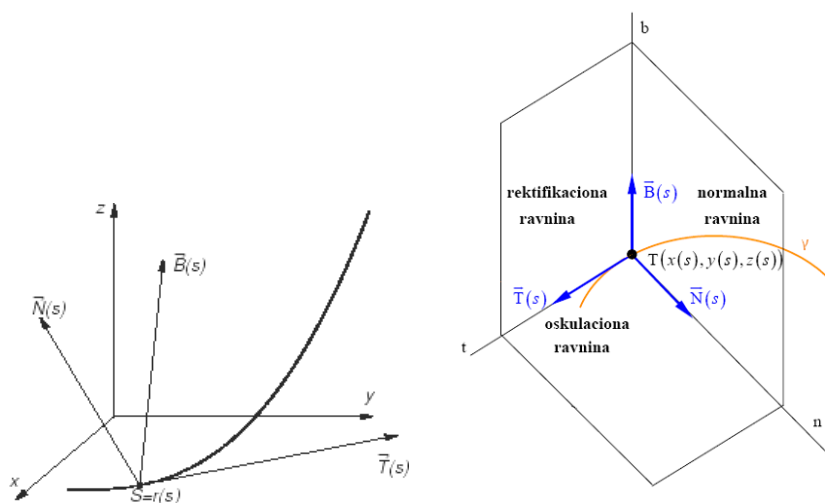
Definicija 1.10 Vektor $\vec{B}(s)$ zovemo jediničnim vektorom binormale.

Vektori $\vec{T}(s)$, $\vec{N}(s)$ i $\vec{B}(s)$ čine desnu ortonormiranu bazu u svakoj tački krive, no kako idemo po krivoj, tako i ova baza rotira. Ovi vektori su prikazani na slici(3), lijevo. Pravce određene ovim vektorima zovemo tangentom, normalom i binormalom krive. Njihove jednačine su date sljedećim formulama:

- Tangenta na krivu je data jednačinom $\frac{x-x_0}{x'_0} = \frac{y-y_0}{y'_0} = \frac{z-z_0}{z'_0}$
- Normala na krivu je data jednačinom $\frac{x-x_0}{x''_0} = \frac{y-y_0}{y''_0} = \frac{z-z_0}{z''_0}$
- Binormala je data jednačinom $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ y'_0 & z'_0 & x'_0 \\ y''_0 & z''_0 & x''_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0 & x-x_0 \\ z'_0 & x'_0 & y'_0 \\ z''_0 & x''_0 & y''_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z-z_0 & x-x_0 & y-y_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{vmatrix}$

Kao što smo već naveli, ovi vektori čine desnu ortnormiranu bazu. Ravni (prikazane na slici(3), desno) koje oni razapinju su važne za krivu i date su:

- Normalna ravan razapeta nad vektorima $\vec{N}(s)$ i $\vec{B}(s)$ (vektor normale je $\vec{T}(s)$) i njena jednačina je $x'_0(x - x_0) + y'_0(y - y_0) + z'_0(z - z_0) = 0$
- Retifikaciona ravan je razapeta nad vektorima $\vec{B}(s)$ i $\vec{T}(s)$ (vektor normale je $\vec{N}(s)$) i njena jednačina je $x''_0(x - x_0) + y''_0(y - y_0) + z''_0(z - z_0) = 0$
- Oskulatorna ravan koja je razapeta nad vektorima $\vec{T}(s)$ i $\vec{N}(s)$ (a vektor normale je $\vec{B}(s)$) i njena jednačina je $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{vmatrix} = 0$



Slika 3: Vektori tangente, normale i binormale (lijevo) i normalna, oskulatorna i retifikaciona ravan(desno)

Misleći ponovo o krivoj kao putanji tačkastog tijela, koje se kreće stalnom brzinom, njeno ubrzanje bit će povezano sa zakrivljenosti puta: što je veća zakrivljenost, to je veće i ubrzanje. Gledajući geometrijski, s druge strane, krivina krive je povezana sa kružnicom kroz “tri beskonačno bliske tačke”, tj. ako je veći poluprečnik ove kružnice, kriva je manje zakrivljena.

Definicija 1.11 Neka je $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ kriva zadana sa

$$\gamma = \gamma(s)$$

gdje je s prirodni parametar. Realnu funkciju $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ definisanu formulom

$$\kappa(s) = \left| \frac{d^2 \vec{\gamma}}{ds^2} \right|$$

zovemo krivinom ili fleksijom ili prvom zakrivljenošću krive γ .

Geometrijski je krivina mjera zaokreta tangentnog vektora. Tačnije, krivina u tački $\gamma(s_0)$ je granična vrijednost količnika zaokreta tangentnog vektora duž nekog luka i dužine tog luka.

Definicija 1.12 Broj $R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$ naziva se poluprečnik krivine.

Već smo uočili da prirodni parametar ima samo teorijsku važnost, i da u praktičnom računanju može biti veoma komplicirano raditi s njim. Zato su nam potrebne formule koje će koristiti bilo koju parametrizaciju. Takva formula je

$$\kappa = \frac{|\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)|}{|\vec{\gamma}'(t)|^3} \quad (5)$$

Primjer 1.8 Nađimo krivinu kružnog heliksa, koji je parametriziran dužinom luka. Njegova jendačina je tada

$$\gamma(s) = (r \cos as, r \sin as, as),$$

gdje je $a = \frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}$. Za heliks vrijedi

$$\gamma'(s) = (-ra \sin as, ra \cos as, ha) = a(-r \sin as, r \cos as, h),$$

pa je tada:

$$\vec{T}(s) = a(-r \sin as, r \cos as, h).$$

Iz formule $\kappa(s) = \left| \vec{T}(s) \right|$ lako izračunavamo da je

$$\kappa(s) = \frac{r}{r^2 + h^2}.$$

Već smo vidjeli šta predstavlja krivina u geometrijskom smislu. Torzija će biti mjera promjene oskulatorne ravnine, tj. kako ona brzo rotira oko tangentne linije.

Definicija 1.13 Torzija ili druga zakrivljenost krive u prostoru \mathbb{R}^3 je skalarna funkcija $\tau(s)$ definisana sa

$$\tau(s) = -\vec{B}(s) \cdot \vec{N}(s). \quad (6)$$

Međutim, kao i kod krivine, ova formula vrijedi samo u slučaju da je riječ o prirodnom parametru. Ponovo nam je potrebna formula koja će koristiti proizvoljan parametar.

Neka je $\gamma = \gamma(t)$, gdje je t proizvoljan parametar. Tada ćemo torziju računati po formuli

$$\tau = \frac{[\gamma', \gamma'', \gamma''']}{|\gamma' \times \gamma''|^2}. \quad (7)$$

Primjer 1.9 Neka je dat heliks parametrizacijom kao u primjeru (1.3). Tada za njega vrijedi

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (-r \sin t, r \cos t, h), \\ \gamma''(t) &= (-r \cos t, -r \sin t, 0), \\ \gamma'''(t) &= (r \sin t, -r \cos t, 0). \end{aligned}$$

Sada izračunajmo krivinu i torziju po formulama 5 i 7. Iz toga slijedi da je

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{|(r^2, -rh \cos t, rh \sin t)|}{|(-r \sin t, r \cos t, h)|^3} = \frac{r}{r^2 + h^2}, \\ \tau(t) &= \frac{hr^2}{r^2(r^2 + h^2)} = \frac{h}{r^2 + h^2}. \end{aligned}$$

Iz prethodnog primjera vidimo da je krivina i torzija heliksa konstantna. Navedimo sada nekoliko osobina krivine i torzije u vidu teorema čije ćemo dokaze izostavit.

Teorema 1.1 Krivina i torzija krive ne zavise od reparametrizacije.

Teorema 1.2 Neka je γ kriva čija je krivina κ i torzija τ . Tada vrijedi:

1. Ako je $\kappa = 0$ onda je kriva γ dio nekog pravca u \mathbb{R}^3 .
2. Ako je $\kappa \neq 0$ i $\tau = 0$, onda je kriva γ sadržana u nekoj ravnini u \mathbb{R}^3 .
3. Ako je $\kappa = \text{const} \neq 0$ i $\tau = 0$ onda je kriva γ dio neke kružnice u \mathbb{R}^3 .
4. Ako je $\kappa = \text{const} \neq 0$ i $\tau = \text{const} \neq 0$ onda je γ dio nekog heliksa.
5. Ako je $\kappa\tau \neq 0$ i $\frac{\tau}{\kappa} = \text{const}$ onda je γ heliks.

1.5 Frenetove formule

Definicija 1.14 *Preslikavanje sa matričnim vrijednostima*

$$t \rightarrow F(t) := (T(t), N(t), B(t))$$

zove se principalnim okvirom krive.

Posmatrajmo krivu kao putanju tijela. Pokušajmo da opišemo kretanje koristeći krećući referentni sistem $F = (T, N, B)$. Naprimjer, ako posmatramo putanju aviona, onda nas zanima kako sam pilot može uticati na krivinu i torziju?

Teorema 1.3 *Kretanje principalnog okvira $F = (T, N, B)$ dužinom luka parametrizirane krive $s \rightarrow \gamma(s)$ je opisano pomoću Frenetovih jednačina:*

$$\begin{pmatrix} \vec{T}'(s) \\ \vec{N}'(s) \\ \vec{B}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{T}(s) \\ \vec{N}(s) \\ \vec{B}(s) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Teorema 1.4 *(Fundamentalni teorem prostornih krivih) Neka su $s \mapsto \kappa(s)$ i $s \mapsto \tau(s)$ dvije funkcije.*

Onda postoji kriva parametrizirana dužinom luka $s \mapsto \gamma(s)$ gdje su κ i τ njena krivina i torzija. Ova kriva je jedinstvena do izbora rigidnog kretanja.

Primjedba 1.1 *Transformacija koja se sastoji od rotacije i translacije i koja ostavlja dati argument nepromijenjenim zove se rigidno kretanje.*

2 Implementacija metoda diferencijalne geometrije u *Mathematica-i*

2.1 Crtanje grafika krivih u 3D prostoru

Kao što smo vidjeli u dijelu (1.2), krive možemo zadati na dva načina. Isto tako, i u *Mathematici* ih možemo crtati na dva načina i to:

- Kao presjek dvije površi
- Kao grafik parametarski zadane funkcije.

Osnovana naredba za crtanje u *Mathematici* je `Plot`. Krive ćemo crtati pomoću već ugrađenih funkcija, i to:

- `ContourPlot3D`,
- `ParametricPlot3D`.

Funkcija `ContourPlot3D` služi za crtanje krivih koje su zadate kao presjek dvije površi. Ona ima oblik

`ContourPlot3D[f, {x, x1, x2}, {y, y1, y2}, {z, z1, z2}]`,

gdje su x_1 i x_2 granice po x , y_1 i y_2 granice po y , z_1 i z_2 po z .

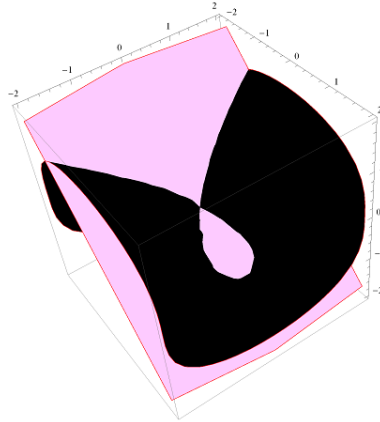
Naravno, ako zadamo *Mathematici* funkciju na gore navedeni način, kao rezultat ćemo dobiti površ. Zato, za crtanje krivih ćemo koristiti izmijenjeni oblik ove funkcije i to

`ContourPlot3D[{f, g}, {x, x1, x2}, {y, y1, y2}, {z, z1, z2}]`,

gdje će naša kriva biti presjek površi zadatih sa $f(x, y, z) = 0$ i $g(x, y, z) = 0$. Ova funkcija ima mnogo opcija, pa navedimo neke od njih:

<code>Axes</code>	Nudi opciju da li želimo da nam prikaže ose ili ne
<code>AxesLabel</code>	Daje nam mogućnost da imenujemo ose po našoj želji
<code>BoxRatios</code>	Određujemo u kojim ćemo granicama crtati okvir slike
<code>BoundaryStyle</code>	Određujemo boju krajeva grafa
<code>ColourFunction</code>	Pomoću ove opcije biramo boju našeg grafa
<code>Mesh</code>	opcija koja određuje da li će biti crtana mreža
<code>PlotRange</code>	Određujemo domen crtanja
<code>PlotLabel</code>	Daje mogućnost imenovanja grafa po želji

Primjer 2.1 *Neka treba nacrtati krivu koja nastaje presjekom površi $x^3 + y^2 - z^2 = 0$ i $x + y - \frac{1}{8}z = 0$. U Mathematici tada moramo unijeti:*



Slika 4: Implicitno zadata kriva sa $x^3 + y^2 - z^2 = 0$ i $x + y - \frac{1}{8}z = 0$

```
ContourPlot3D[{x^3 + y^2 - z^2 == 0, x + y - 1/8*z == 0}, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, {z, -2, 2}, BoundaryStyle -> Red, Mesh -> None, ContourStyle -> {Blue, Yellow}],
```

a kao rezultat dobijamo sliku (4).

Za crtanje parametarski zadatih krivih služi nam funkcija `ParametricPlot3D` i njen oblik je

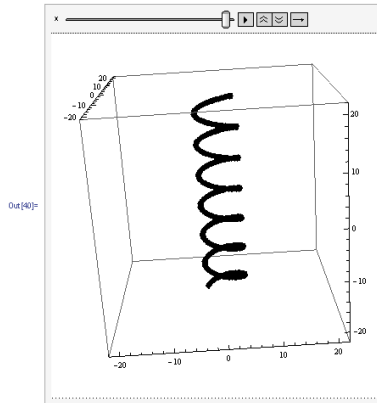
```
ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,t1,t2}],
```

gdje su x, y, z funkcije od parametra t , a brojevi t_1 i t_2 su granice za t .

Primjer 2.2 Ako želimo u Mathematici da crtamo heliks koji je zadat parametarskom jednačinom $\gamma(t) = (4 \sin t, 4 \cos t, t)$ gdje je $t \in [-20, 20]$ tada bi trebali unijeti sljedeće:

```
Animate[ParametricPlot3D[{4 Sin[t], 4 Cos[t], t}, {t, -20, x}, PlotRange -> 22, PlotStyle -> {Thickness[0.02]}], {x, -20, 20}],
```

a kao rezultat dobijamo sliku 5.



Slika 5: Heliks $\gamma(t) = (4 \sin t, 4 \cos t, t)$

Kao i kod `ContourPlot3D`, i `ParametricPlot3D` ima opcije koje nam dopuštaju manipulaciju sa grafom. Neke osnovne opcije su: `Axes`, `AxesLabel`, `Boxed`, `ColourFunction`, `PlotStyle` i druge.

2.2 Dužina luka

Iz diferencijalne geometrije znamo kako ćemo izračunati dužinu luka krive po formuli (4). Za računanje dužine luka krive u *Mathematici* ne postoji već ugrađena funkcija. Međutim, lako se napravi funkcija koja kao ulazne podatke uzima krivu u parametarskom obliku, parametar i vrijednosti granica u kojima želimo da izračunamo dužinu krive. Takva funkcija je `DuzinaLuka` čiji je format dat sa `DuzinaLuka[{x, y, z}, {t, t1, t2}]`, gdje su x , y i z koordinatne funkcije krive, t je parametar te krive, a $t1$ i $t2$ su granice u kojima želimo da izračunamo dužinu luka. Kod ove funkcije je dat u file-u `DuzinaLuka.nb` u dodatku uz diplomski rad.

Primjer 2.3 U primjeru (1.6) smo vidjeli kako ćemo izračunati dužinu luka heliksa od tačke 0 do tačke t . U *Mathematici* ćemo to postići na sljedeći način

```
In[60]:= DuzinaLuka[{r Sin[t], r Cos[t], a t}, {t, 0, t}]
Out[60]= Sqrt[a^2 + r^2] t.
```

U slučaju da želimo izračunati dužinu heliksa, gdje je $a = 5$ i $r = 2$, od tačke $t_0 = 1$ do tačke $t_1 = 4$, imamo

```
In[61]:= DuzinaLuka[{2 Sin[t], 2 Cos[t], 5 t}, {t, 1, 4}]
Out[61]=3 Sqrt[29].
```

2.3 Krivina i torzija

U dijelu (1.4) smo vidjeli šta predstavljaju krivina i torzija u geometrijskom smislu i kako se računaju. Kao i kod dužine luka, ne postoje već ugrađene funkcije koje ih računaju. Međutim, ponudit ćemo dvije funkcije koje će bar malo olakšati to računanje.

Za računajuju krivine krive nudimo funkciju `Krivina` koja ima dva oblika, i to:

- `Krivina[{x,y,z},t]`,
- `Krivina[{x,y,z},{t,t0}]`.

Kod oba oblika funkcije ulazni podaci su kriva (u velike zagrade navodimo koordinatne funkcije krive) i parametar po kojem je ona definisana. U dodatku, u file-u `Krivina.nb`, je naveden cjelokupan kod ove funkcije. Navedimo sada primjer:

Primjer 2.4 *Izračunajmo krivinu heliksa datog parametarski kao u primjeru (1.3) u proizvoljnoj tački t . Tada ćemo imati*

```
In[2]:= Krivina[{r Sin[t], r Cos[t], h t}, t]
Out[2]= Sqrt[r^2 (h^2 + r^2)]/(h^2 + r^2)^(3/2).
```

Vidimo da je i ovdje krivina heliksa konstantna. U slučaju da tražimo krivinu heliksa za konkretne vrijednosti r i h , imati ćemo:

```
In[2]:= Krivina[{6 Sin[t], 6 Cos[t], 5 t}, t]
Out[2]= 6/61.
```

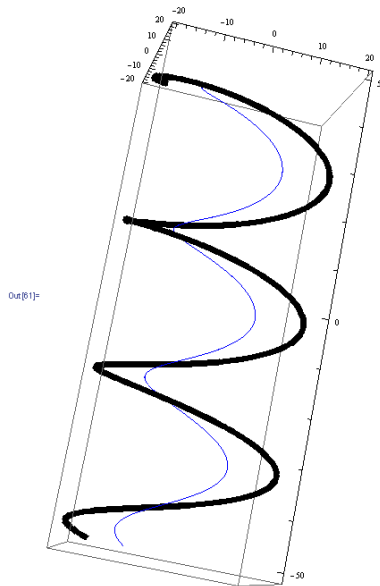
Navedimo sad primjer kada tražimo krivinu krive u konkretnoj tački.

Primjer 2.5 *Izračunajmo krivinu zavojnice*

$$\gamma(t) = (t \sin t, t \cos t, 4t) \quad (9)$$

u tački $T(0,0,0)$. Vidimo da je vrijednost parametra t u ovoj tački $t_0 = 0$. Tada ćemo imati

```
In[36]:= Krivina[{t Cos[t], t Sin[t], 4 t}, {t, 0}]
Out[36]= 2/17.
```



Slika 6: Krive r_1 i r_2 , gdje je r_1 "uža kriva"

Torziju ćemo računati pomoću funkcije `Torzija` (čiji je kod dat u dodatku u file-u `Torzija.nb`). Ova funkcija ima dva oblika, koja daju mogućnost računanja torzije u proizvoljnoj tački i mogućnost računanja iste za konkretnu vrijednost parametra t , i to:

- `Torzija[{x,y,z},t]`
- `Torzija[{x,y,z},{t,t0}]`.

Navedimo sada primjer u kojem ćemo iskoristiti ove funkcije.

Primjer 2.6 *Izračunajmo torziju heliksa čija je parametrizacija data u primjeru (1.3). Tada je:*

```
In[4]:= Torzija[{r Sin[t], r Cos[t], h t}, t]
Out[4]= -(h/(h^2 + r^2)).
```

Primjer 2.7 *Posmatrajmo sada dva heliksa koji su dati parametarski sa $r_1(t) = (6 \sin t, 6 \cos t, 5t)$ i $r_2(t) = (2 \sin t, 2 \cos t, 4t)$. Tada su torzije krivih r_1 i r_2 izračunate pomoću:*

```
In[62]:= r1[t_] := {10 Sin[t], 10 Cos[t], 5 t}
r2[t_] := {20 Sin[t], 20 Cos[t], 5 t}
```

```
In[64]:= t1 = Torzija[r1[t], t]
Out[64]= -(1/25)
In[65]:= t2 = Torzija[r2[t], t]
Out[65]= -(1/85).
```

Sa slike (6) vidim da kriva koja r_1 ima "veći uspon", ali je i njena torzija veća.

Za slučaj da trebamo izračunati torziju u datoj tački, koristit ćemo drugi oblik funkcije `Torzija`. Navedimo primjer:

Primjer 2.8 *Izračunajmo torziju zavonice date formulom (9) u tački $T(0, 0, 0)$. Ponovo, vidimo da je vrijednost parametra t u ovoj tački $t_0 = 0$. Imat ćemo:*

```
In[9]:= Torzija[{t Sin[t], t Cos[t], 4 t}, {t, 0}]
Out[9]= -(6/17).
```

2.4 Frenetov trobrid

U dijelu (1.5) smo vidjeli važnost pratećeg trobrida za krivu. U *Mathematici* ne postoje funkcije koje računaju vektore tangente, normale i binormale. Iz diferencijalne geometrije znamo postupak njihovog izračunavanja. Da bi olakšali taj posao, nudimo nekoliko funkcija u *Mathematici*, koje će riješiti taj posao za nas.

Za računanje tangentskog vektora krive nam može poslužiti funkcija `Tangenta` i kod ove funkcije je predstavljen u dodatku diplomskog rada, u file-u `Tvektor.nb`. Ova funkcija ima dva oblika:

- `Tangenta[kriva, t]`,
- `Tangenta[kriva, {t, t0}]`.

Prvi oblik funkcije `Tangenta` daje nam mogućnost da izračunamo jedinični tangentski vektor krive u proizvoljnoj tački.

Primjer 2.9 *Izračunajmo jedinični tangentski vektor heliksa parametrizovanog kao u primjeru (1.3). Tada ćemo imati:*

```
In[67]:= Tangenta[{r Sin[t], r Cos[t], h t}, t]
Out[67]= {(r Cos[t])/Sqrt[
  h^2 + r^2], -(r Sin[t])/Sqrt[h^2 + r^2]}, h/Sqrt[h^2 + r^2]}.
```

Drugi oblik funkcije `Tangenta` služi za računanje tangentskog vektora u željenoj tački.

Primjer 2.10 Izračunajmo jedinični tangentni vektor heliksa parametrizovanog kao u primjeru (1.3). Pa imamo:

```
In[67]:= Tangenta[{r Sin[t], r Cos[t], h t}, t]
Out[67]= {(r Cos[t])/Sqrt[
  h^2 + r^2], -(r Sin[t])/Sqrt[h^2 + r^2]}, h/Sqrt[h^2 + r^2]}.
```

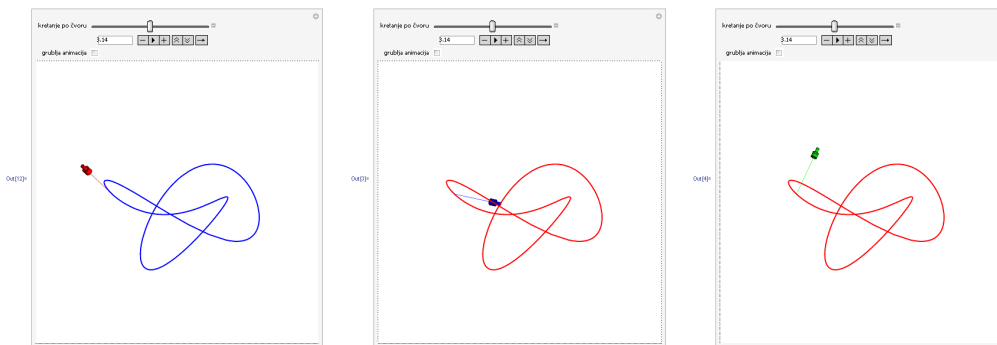
Primjer 2.11 U ovom primjeru posmatrajmo trolisni čvor čija je parametarska jednačina

$$\begin{aligned}x &= (2 + \cos 3t) \cos t, \\y &= (2 + \cos 3t) \sin t, \\z &= \sin 3t.\end{aligned}$$

Pomoću funkcije *Tangenta* možemo izračunati njegov tangentni vektor:

```
In[71]:= Tangenta[{(2 + Cos[3*t])*Cos[t], (2 + Cos[3*t])*Sin[t],
  Sin[3*t]}, {t, Pi}]
Out[71]= {0, -(1/Sqrt[10]), -(3/Sqrt[10])}.
```

Trolisni čvor i njegov tangentni vektor u tački $t = \pi$ je dat slikom (7), a za čitav kod ovog primjera dovoljno je pogledati file *TangentniVektorCvora.nb*.



Slika 7: Trolisni čvor i njegovi vektori tangente(lijevo), normale(srednja slika) i binormale(desno) u tački $t = \pi$.

Pri izračunavanju jediničnog vektora normale, koristit ćemo funkciju *Normala*. Ona, kao i funkcija *Tangenta*, ima dva oblika:

- `Normala[kriva, t]`,

- `Normala[kriva, {t, t0}]`.

Kod ove funkcije je dat u file-u `Nvektor.nb` iz dodatka diplomskog rada.

Primjer 2.12 *Neka je dat heliks kao u primjeru (1.3). tada je njegov vektor normale:*

```
In[80]:= Normala[{r Sin[t], r Cos[t], h t}, t]
Out[80]= {(h Cos[t])/(
  r (h^2 + r^2)), -((h Sin[t])/(r (h^2 + r^2))), -(1/(h^2 + r^2))}.
```

Ako želimo izračunati vektor normale trolisnog čvora u tački $t = \pi$, imat ćemo:

```
In[81]:= Normala[{(2 + Cos[3*t])*Cos[t], (2 + Cos[3*t])*Sin[t],
  Sin[3*t]}, {t, Pi}]
Out[81]= {0, 3/80, -(1/80)}.
```

On je prikazan na slici (7), a kod je dat u file-u `VektorNormaleCvora.nb` iz dodatka.

Za računanje vektora binormale služi funkcija `Binormala`, a njen kod je sadržan u file-u `VektoriTNB.nb`. Kao i prethodne dvije, i ona ima dva oblika:

- `Binormala[kriva, t]`- koja računa vektor binormale u proizvoljnoj tački
- `Binormala[kriva, {t, t0}]`- računa vektor binormale za određenu vrijednost parametra $t = t_0$.

U sljedećem primjeru je ilustriran upotreba date funkcije.

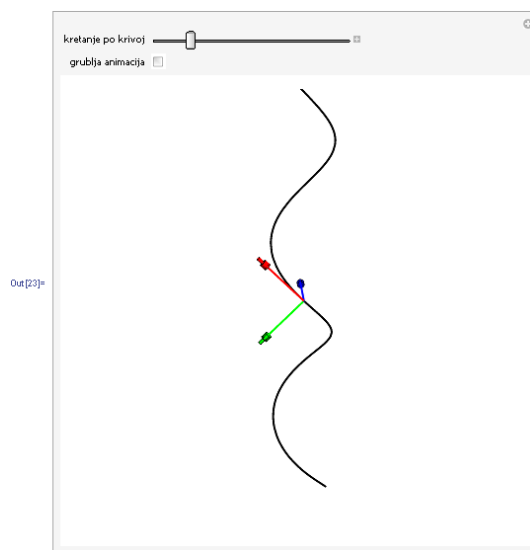
Primjer 2.13 *Ponovo ćemo posmatrati heliks parametriziran na način kao u primjeru (1.3). Tada je:*

```
In[84]:= Binormala[{r Sin[t], r Cos[t], h t}, t]
Out[84]= {-(h^2 Sin[t])/(r (h^2 + r^2)^(3/2)) - (
  r Sin[t])/(h^2 + r^2)^(
  3/2), -((h^2 Cos[t])/(r (h^2 + r^2)^(3/2))) - (
  r Cos[t])/(h^2 + r^2)^(3/2), 0}.
```

Posmatrajmo sada trolisni čvor. Njegov vektor binormale u tački $t = \pi$ je:

```
In[86]:= Binormala[{(2 + Cos[3*t])*Cos[t], (2 + Cos[3*t])*Sin[t],
  Sin[3*t]}, {t, Pi}]
Out[86]= {-(1/(8 Sqrt[10])), 0, 0},
```

a prikazan je na slici (7). Kod za ovaj vektor je dat u file-u `VektoBinormaleCvora.nb`.



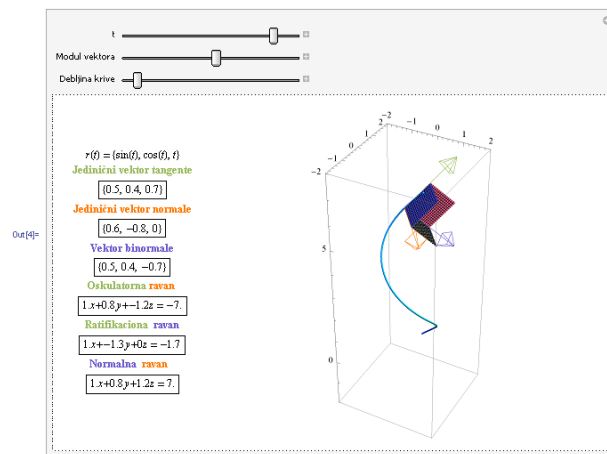
Slika 8: Frenetov prateći trobrid krive $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$

Na slici (8) je prikazan prateći trobrid za krivu $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$. Kod ovog primjera, kao i prethodnih, je sadržan u dodatku diplomskog rada, u file-u `Heliksiprategitrobrid.nb`.

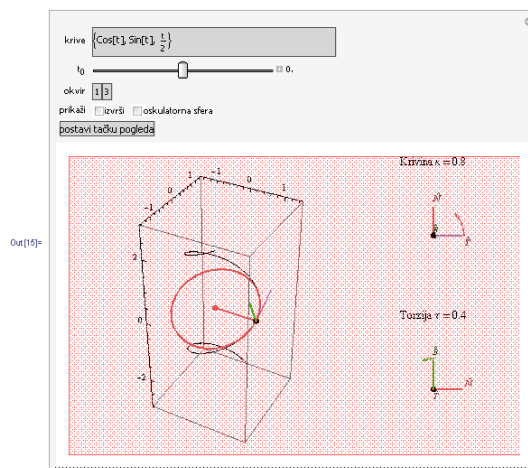
Prikaz ravni koje određuju vektori tangente, normale i binormale nije lagan posao. Zato, u sljedećemo zadatku bit će dat način kako se to može lijepo prikazati u *Mathematici*.

Zadatak 2.1 *Posmatrajmo heliks $r(t) = (\sin t, \cos t, t)$ na $[0, 2\pi]$. Tada će slikom (9) biti prikazani njegovi vektori tangente, normale i binormale, kao i normalna, ratifikaciona i oskulatorna ravan. Sa lijeve strane slike su izračunati jedinični vektori tangente, normale i binormale, kao i jednačine normalne, retifikacione i oskulatorne ravni u tački u kojoj je prikazan trobrid(kod pogledati u dodatku u file-u `Frenetoutrobrid.nb`).*

Zadatak 2.2 *U ovom zadatku je ilustrovano kako Mathematica može pomoći pri izučavanju krivih. Dato nam je da biramo neku od krivih iz palete, a Mathematica izračuna krivinu i torziju za nas, i omogući nam da to prikažemo slikom (10). Za uvid u kod dovoljno je pogledati dodatak diplomskog rada, file `Krivina i torzija nekih krivih.nb`.*



Slika 9: Heliks $r(t) = (\sin t, \cos t, t)$, prateći trobrid i normalna, oskulatorna i retifikaciona ravan.



Slika 10: Na slici je prikazan Frenetov trobrid sa lijeve strane i njegovo ponašanje u zavisnosti od krivine i torzije sa desne.

Literatura

- [1] Wolfram Stephan, *The Mathematica Book*, Wolfram Media, Cambridge University Press, 2003.
- [2] <http://demonstrations.wolfram.com>
- [3] Luther Pfahler Eisenhart, *Diferential Geometry of Curves and Surfaces*, Dover Publications, USA, 2004.
- [4] R. Stojanović, *Osnovi diferencijalne geometrije*, Beograd, 1963.
- [5] Alfred Gray, *Modern Diferential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, CRC Press, USA, 1999.

Dodatak:

Dodatak sadrži sljedeće file-ove:

- Contourplot.nb
- Crtanjefrafika.nb
- DuzinaLuka.nb
- Duzinalukaheliksa.nb
- Frenetovtrobrid.nb
- Heliksipratecitrobrid.nb
- Krivina.nb
- Krivina heliksa.nb
- Krivina i torzija nekih krivih.nb
- Kruzne stepenice.nb
- Nvektor.nb
- Opruga.nb
- parametricplot3d.nb
- racunanje.nb
- Tangentni vektor cvora racun.nb
- TangentniVektorCvora.nb
- Torzija.nb
- Torzija heliksa.nb
- Tvektor.nb
- VektoBinormaleCvora.nb
- vektor binormale cvora racun.nb
- VektoriTNB.nb
- VektorNormaleCvora.nb

Za sadržaj ovih file-ova pogledati priloženi CD.

Gotovi seminarski, maturalni, maturski i diplomski radovi iz raznih oblasti, lektire , puškice, tutorijali, referati - specijalizovan tim za usluge visokokvalitetnog pisanja, istraživanja i obradu teksta za kompletan region Balkana.

Posetite nas na sajtovima ispod:

WWW.MATURSKIRADOVI.NET

WWW.SEMINARSKIRAD.ORG

WWW.MATURSKI.NET

WWW.MATURSKI.ORG

WWW.SEMINARSKIRAD.INFO

Dostupni smo Vam 24h 365 dana u godini.

Za gotove verzije rada obratiti se na mail:

maturskiradovi.net@gmail.com

061/ 11-00-105

Seminarski, diplomski, maturski radovi, prevodi na engleski i eseji...