SEMINARSKI RAD

Matematička logika

Sadržaj:

Uvod

Osnovno sredstvo sporazumjevanja među ljudima je jezik. Razlikujemo više vrsta jezika sporazumjevanja, kao što su npr. slikarski, muzički, obični govorni i književni jezik. Matematički jezik je najviši oblik naučnog jezika.
Za razliku od npr. slikarskog jezika, metematici je potreban jezik pomoću koga se izražavamo i sporazumjevamo bez dvosmislenosti i nedorečenosti. Zadatak matematičke logike je proučavanje, istraživanje i stalna dogradnja takvog matematičkog jezika, tj. jezika simbola kao sredstva za razvijanje mišljenja, rasuđivanja, zaključivanja i komuniciranja u matematici.
Najsličniji matematičkom jeziku su govorni i književni jezik. Osnovu ovih jezika čine glas, slovo, riječ i rečenica. Nešto slično važi i za matematički jezik u kome osnovu čine matematički izrazi ili termini. Najprostiji matematički izrazi su konstante i promjenjive.

Konstante su potpuno određeni matematički objekti, tj. veličine kojima se vrijednost ne mjenja, npr. –8, 0, 2, 2/3, 5..........

Promjenjive su simboli koji mogu predstavljati bilo koji elemenat iz nekog datog skupa. Dati skup se naziva oblast definisanosti promjenjive. Konstante kojima se zamjenjuju promjenjive nazivaju se vrijednosti promjenjivih.

Matematičke formule koje sadrže promjenjive kojima vrijednost nije definisana i za koje se zbog toga nemože jednoznačno utvrditi vrijednost istinitosti, su neodređeni iskazi i nazivaju se iskazne forme, iskazne funkcije, ili predikati. Predikati postaju iskazi kada se u njima na mjesto promjenjivih uvrste konstante, tj. vrijednosti promjenjivih. Za predikate sa jednom, dvije, tri, itd. Promjenjivih se kaže da su dužine jedan, dva, tri, itd.

I. Pojmovi i oznake matematičke logike

Zbog preciznosti i kratkoće u izlaganju, u matematici se koriste neki pojmovi i oznake matematičke logike.

Definicija 1. Pod sudom se podrazumjeva iskaz koji ima smisla i za koji važe sljedeća dva principa:

1. (Princip isključenja trećeg). Svaki sud ima bar jednu od osobina istinitosti ili neistinitosti, tj. ne postoji sud koji bi bio i istinit i neistinit.

2. (Princip kontradikcije). Svaki sud ima najviše jednu od osobina istinitosti ili neistinosti, tj. nema suda koji bi bio istinit ili neistinit.

Ovo je opisna, intuitivna, definicija suda.
Prema ovoj definiciji, dakle, svaki sud ima samo jednu vrijednost istinitosti: sud je ili istinit ili neistinit.

Definicija 2: U matematici se istinit sud zove teorema ili stav.
Vrijednost istinitog suda označava se sa $\top$ ili sa 1, a neistinitog $\perp$ ili 0. Među elementima $\top$ i $\perp$, odnosno 1 I 0, definišu se operacije od kojih su osnovne: konjukcija, disjunkcija, negacija, implikacija I ekvivalencija.

Definicija 3: Svaki složeni sud dobijen primjenom logičkih operacija konjukcije, disjunkcije, negacije, implikacije I ekvivalencije na neke polazne sudove naziva se formula.

Definicija 4: ¨Formula koja za sve vrijednosti istinitosti sudova koji ulaze u tu formulu dobiva vrijednost $\top$ naziva se tautologija.¨

Definicja 5: ¨Formula koja za sve vrijednosti istinitosti sudova koji ulaze u tu formulu dobiva vrijednost $\perp$ naziva se kontradikcija.¨

II. Konjukcija

Ako su P i Q dva suda, sud ¨P i Q¨ zovemo konjukcija (logički proizvod) sudova P i Q i pišemo $P \wedge Q$. Ovaj složeni sud je istinit jedino ako su oba suda P I Q istinita, inače je neistinit.
Sa p ćemo označavati istinitosnu vrijednost (vrijednost istinitosti) suda P, sa q istinitosnu vrijednost suda Q I sa $p \wedge q$ istinitosnu vrijednost suda

PΛQ. Sa ovim oznakama navedena činjenica pregledno je predstavljena istinitosnom tablicom

p	Q	pΛq
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

III. Disjunkcija

Ako su P i Q dva suda, pod sudom ¨P ili Q¨ podrazumijeva se tvrđenje da vrijedi bilo sud P ili sud Q, uz mogućnost da istovremeno vrijede oba. Ovaj složeni sud zove se disjunkcija (inkluzivna) ili logički zbir sudova P i Q i označava se PVQ. Disjunkcija PVQ je istinita ako je istinit bar jedan od sudova P i Q. Za ovaj slučaj data je istinitosna tablica

p	q	pVq
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Sud ¨P ili Q ali ne oba¨ zove se ekskluzivna disjunkcija. Ovaj se sud izražava sa formulom (PΛQ') V (QΛP') i obilježava PVQ. Ova definicija predstavljena je istinitosnom tablicom

p	q	pVq
$\top$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

IV. Negacija

Negacija suda P označava se sa P'. Sud P' je istinit ako je sud P neistinit I neistinit ako je sud P istinit. Odgovarajuća istinitosna tablica glasi

p	p'
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

V. Implikacija

Neka su P i Q dva suda. Sud ¨Ako P tada Q¨ zovemo implikacija suda Q sa sudom P, ili implikacija od suda P na sud Q, i to označavamo P=>Q. Sud ¨Ako P tada Q¨ ima isto značenje kao:

- P je dovoljan uslov za Q
- Q je potreban uslov za P
- iz P slijeduje Q
- sud Q je posljedica suda P

Implikacija P=>Q je neistinita ako i samo ako je P istinito, a Q neistinito, tj. $(\top \Rightarrow \bot) = \top$. Inače je

$(\top \Rightarrow \top) = (\bot \Rightarrow \top) = (\bot \Rightarrow \bot) = \top$

Istinitosna tablica za operaciju implikacija data je shemom. Relacija Q≠> znači da iz Q ne proističe P.

p	q	P=>q
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

PRIMJER: $a=-1 \Rightarrow a^2=1$ $\qquad a^2=1 \not\Rightarrow a=-1$

VI. Ekvivalencija

Neka su P i Q dva suda. Sud ¨Ako P tada Q i ako Q tada P¨ zove se ekvivalencija suda P sa sudom Q i označava se P ⇔ Q

Sud P ⇔ Q isto znači kao i

- P je ako i samo ako je Q
- P je potreban i dovoljan uslov za Q

Prema tome, ekvivalencija je složen sud (P =>Q) ^ (Q =>P).
Istinitosna tablica za ekvivalenciju glasi:

P	q	P<=>q
⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊤

PRIMJER: a>o =>1/a>0; 1/a>0 => a>0; a>0 ⇔ 1/a>0.

VII. De Morganovi zakoni

(P V Q)’ ⇔ P’ Λ Q’; (P Λ Q)’ ⇔ P’ V Q’

Pokažimo:

P	**Q**	**P V Q**	**P**	**Q’**	**(P V Q)’**	**P’ Λ Q’**
⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤

<u>(P V Q)’</u> = <u>P’ Λ Q’</u>

P V Q $\overline{P}$ Λ $\overline{Q}$

$(P \wedge Q)' \Leftrightarrow P' \vee Q'$

P	**Q**	**P Λ Q**	**P’**	**Q’**	**(P Λ Q)’**	**P’ V Q’**
$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Dokazali smo da P Λ Q vrijedi.

VIII. Kvantifikatori

Iskaz “za svako a važi a=a” simbolizuje se

$(\forall a)$, $a=a$ ili $\forall a$, $a=a$

Iskaz “za svako a i b iz skupa C kompleksnih brojeva važi
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$”
simbolizuje se
$(\forall a), (\forall b)\quad (a, b\ s \in \mathbf{C}) \Rightarrow (a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Iskaz “ postoji bar jedno x iz skupa **C** kompleksnih brojeva tako da je
$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C})$”
simbolizuje se
$(\forall a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C})\ (\exists x \in \mathbf{C}) \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots a_{n-1} x + a_n = 0.$

Iskaz “za svako x postoji bar jedno y takvo da je x<y” simbolizuje se
$(\forall x)\ (\exists y) \quad x<y.$

Oznake $\forall$ (svaki, svi) i $\exists$ (postoji bar jedno) zovu se kvantifikatori (kvantori).

IX. Osobine logičkih simbola

Stav 1. Konjukcija, disjunkcija i ekvivalencija su komutativne:

$(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$; $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$; $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow P)$

Stav 2. Konjukcija, disjunkcija I ekvivalencija su asocijativne:

$((P \wedge Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$; $((P \vee Q) \vee R)) \Leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$

$((P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow R) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow R))$

Stav 3. Konjukcija I disjunkcija su idempotentne:

$(P \wedge P) \Leftrightarrow P$; $(P \vee P) \Leftrightarrow P$

Stav 4. Konjukcija I disjunkcija su distributivne:

$(P \wedge (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge (P \wedge R))$; $(P \vee (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \vee P \vee R))$

Stav 5. Konjukcija je distributivna prema disjunkciji I obratno:

$(P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$; $(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge P \vee R))$

Stav 6. Konjukcija je apsorptivna prema disjunkciji I obratno:

$(P \wedge (P \vee Q)) \Leftrightarrow P$; $(P \vee (P \wedge Q)) \Leftrightarrow P$

Stav 7. Negacija je involutivna:

$(P')' \Leftrightarrow P$

Stav 8. $\top$ je neutralani element za konjukciju i ekvivalenciju, a $\perp$ za disjunkciju:

$(P \wedge \top) \Leftrightarrow (\top \wedge p) \Leftrightarrow p$; $(p \Leftrightarrow \top) \Leftrightarrow (\top \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow p$; $(p \vee \perp) \Leftrightarrow (\perp \vee p) \Leftrightarrow p$.

Stav 9. $\top$ je nula-element za disjunkciju, a $\perp$ za konjukciju:

$(p \vee \top) \Leftrightarrow (\top \vee p) \Leftrightarrow \top$; $(P \wedge \perp) \Leftrightarrow (\perp \wedge p) \Leftrightarrow \perp$.

Navedene osobine mogu se dokazati, na primjer, pomoću tablica istinitosti, koje smo već prikazali.

PRIMJER:
Pokazati da li je tačan iskaz P Λ Q, ako je:
P: a2-b2= (a-b) (a+b)
Q: (a-b) (a-b)=a2-2ab+b2

P Λ Q=⊤

PRIMJER:
Pokazati da li je tačan iskaz PVQ, ako je

P {5-[2-2(5-3)]+7} =14
{5-[2-2·2]+7}=14
[5-(-2)+7]=14
[5+2+7]=14
14=14

P=>⊤

Q {3·(2-7)-5[2-(1-3)]}=15
{3·(-5)-5[2-(-2)]}=15
{-15-5(2+2)}=15
{-15-5·4}=15
-35≠15

Q=>⊥ PVQ=⊥

X. Zaključak

Principi matematičke logike se do danas koriste direktno u binarnim sistemima. Električna kola su bazirana na matematičkoj logici, pa imamo tako Λ kola, V kola…………

Možemo reći da je sva današnja digitalna elektronika bazirana na matematičkoj logici.
Binarni sistemi su osnova u svim informatičkim naukama, primjenjuju se u Bullovoj algebri.

Literatura

LINEARNA ALGEBRA, POLINOMI, ANALITIČKA GEOMETRIJA, dvanaesto izdanje, Beograd 1988, dr Dragoslav S. Mitrinović

Kompendium izvora za predmet Poslovna matematika, Banja Luka

Internet