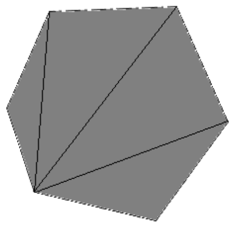
Seminarski rad iz Matematičke Analize I:

PROBLEM POVRŠINE I ODREĐENI INTEGRAL

1. PROBLEM ODREĐIVANJA POVRŠINE

U začetcima matematike jedan od osnovnih zadataka je bio **problem računanja površine i volumena**. Površina pravokutnika se lako određuje iz izmjerenih duljina stranica a i b jer je njegova površina definirana kao produkt stranica, tj. **P=ab**. Površinu paralelograma i trokuta možemo mjeriti transformacijom pravokutnika, dok se bilo koji mnogokut može podijeliti na trokute i tako možemo izračunati njegovu površinu.



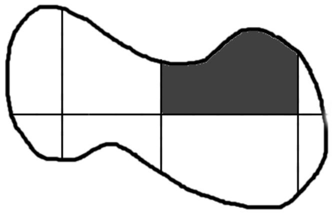
Problem je što se na ovaj način ne može mjeriti površina bilo kojeg lika, kojemu je jedan rub opisan krivuljom,. Takav jednostavan skup nazivamo krivocrtnim trapezom. To je skup točaka ravnine omeđenih sa tri strane dužinama, a s četvrte strane krivuljom. Već pri izvodu površine kruga moramo se koristiti aproksimacijama.

Arhimed, jedan od najvećih matematičara stare Grčke, se već u trećem stoljeću prije nove ere koristio postupkom koji je kasnije nazvan **metoda iscrpljivanja ili ekshaustije**. On je računao površinu kruga upisujući mu i opisujući pravilne mnogokute. Povećavajući im broj stranica, mogao je izračunati površinu sa dovoljnom točnošću. Koristeći metodu ekshaustije i ravnoteže poluge Arhimed je izračunao volumen kugle i površinu sfere. Upisujući krugu pravilni 96-terokut našao je aproksimaciju $3\frac{1}{7} < \pi < 3\frac{10}{71}$. Arhimeda mnogi smatraju duhovnim začetnikom infinitezimalnog računa.

Matematičari su na različite načine pokušali riješiti problem računanja volumena i površine i imali su metode prilagođene konkretnom liku ili tijelu. Tek krajem 17.stoljeća taj **problem je riješen**, ali ne geometrijski već **analitički**.

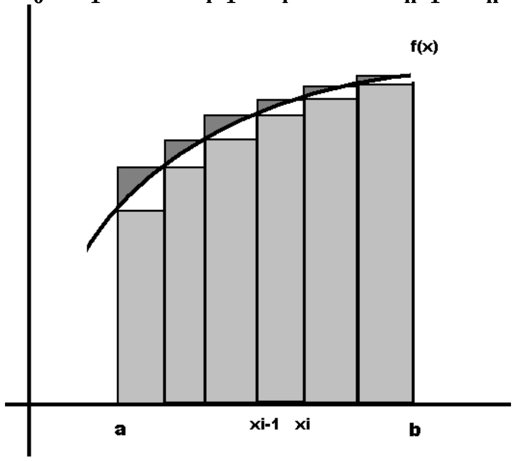
2. POVRŠINA KRIVOCRTNOG TRAPEZA I INTEGRALNE SUME

Slično kao i računanju površine kruga možemo prići i računanju bilo kojeg lika omeđenog «glatkom» zatvorenom krivuljom. Horizontalnim i vertikalnim cijepanjem možemo svaki lik podijeliti na više krivocrtnih trapeza. Tako problem površine krivocrtnog trapeza svodimo na računanje površine ispod grafa neke funkcije.



Uzmimo neku funkciju **f neprekinutu i pozitivnu na [a,b]**. Površinu ćemo aproksimirati pravokutnicima. Najprije odaberemo **n-1** različitu točku iz intervala **[a,b]** tako da vrijedi

$$\mathbf{a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots.<x_{n-1}<x_n=b}$$



Svaku takvu podjelu nazivamo subdivizijom i označavamo sa $||\Delta||$. Duljina svakog intervala je $\mathbf{\Delta x_i=x_i-x_{i-1}}$, a najveću od tih duljina nazivamo normom subdivizije i označavamo sa $||\Delta||$.Nad svakim intervalom $\mathbf{[x_{i-1},x_i]}$ postavit ćemo dva pravokutnika, jedan koji leži ispod grafa, a drugi koji ga premašuje.

Kako je funkcija f neprekinuta na [a,b] tada je neprekinuta i na $\mathbf{[x_{i-1},x_i]}$ i zato na tom intervalu poprima najveću vrijednost $\mathbf{M_i}$ i najmanju vrijednost $\mathbf{m_i}$. Sada imamo pravokutnike kojima je jedna stranica duljine $\mathbf{\Delta x_i}$, dok im je druga stranica duljine m_i ili M_i. Sada možemo površinu P ispod grafa funkcije aproksimirati sumama

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \ \text{ i } \ S=\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Sumu s nazivamo donjom sumom, a sumu S gornjom sumom. Za te sume vrijedi

$$\mathbf{s \le P \le S}$$

3. RIEMANNOV INTEGRAL

Neka je zadana **ograničena funkcija f na [a,b]** i neka je izvršena subdivizija tog intervala. Kako je f ograničena na [a,b] tada je ograničena i na svakom intervalu **$[x_{i-1},x_i]$**. Na svakom tom intervalu postoji infimum funkcijskih vrijednosti **m_i** i supremum **M_i**. Odaberemo bilo koji broj **k_i** iz i-tog intervala. Tada vrijedi
$m_i \le f(k_i) \le M_i$.
Množenjem sa **Δx_i** i sumiranjem dobivamo sume **s**, **σ** i **S** za koje vrijedi

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sigma = \sum_{i=1}^{n} k_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = S$$

Te sume nazivamo:
s-donja integralna suma
σ-integralna suma
S-gornja integralna suma

Često ove sume nazivamo **Darbouxovim** sumama. Različitim subdivizijama dobivamo različite donje i gornje sume, a integralnu sumu možemo mijenjati odabirom točaka **k_i** unutar svakog intervala. Skup svih donjih suma ćemo označiti sa **ϑ** a skup svih gornjih suma sa **Ψ**. Skup ϑ je ograničen odozgo, tj ima supremum, dok je skup Ψ ograničen odozdo i ima infimum.

Za svaku ograničenu funkciju **f(x)** na intervalu **[a,b]** postoje **donji integral**, **$I_D = \sup\vartheta$** i **gornji integral, $I_G = \inf\Psi$**.

Ako je **$I_D = I_G$** tada taj broj nazivamo **Riemannovim integralom** funkcije **f(x)** na intervalu [a,b] i označavamo sa

$$I_D = I_G = I = \int_a^b f(x)dx$$

Brojevi **a** i **b** su **donja**, odnosno **gornja granica integrala**, a funkcija **f(x)** je **podintegralna** funkcija.

Definicija Riemannova integrala: Broj I je limes integralnih suma **$\sigma(k_i, \Delta_i)$** kada **$||\Delta|| \to 0$** ako za svaki **$\varepsilon > 0$** postoji **$\delta > 0$** takav da vrijedi
$||\Delta|| < \delta \Rightarrow |I - \sigma| < \varepsilon$
ili drugačije zapisano

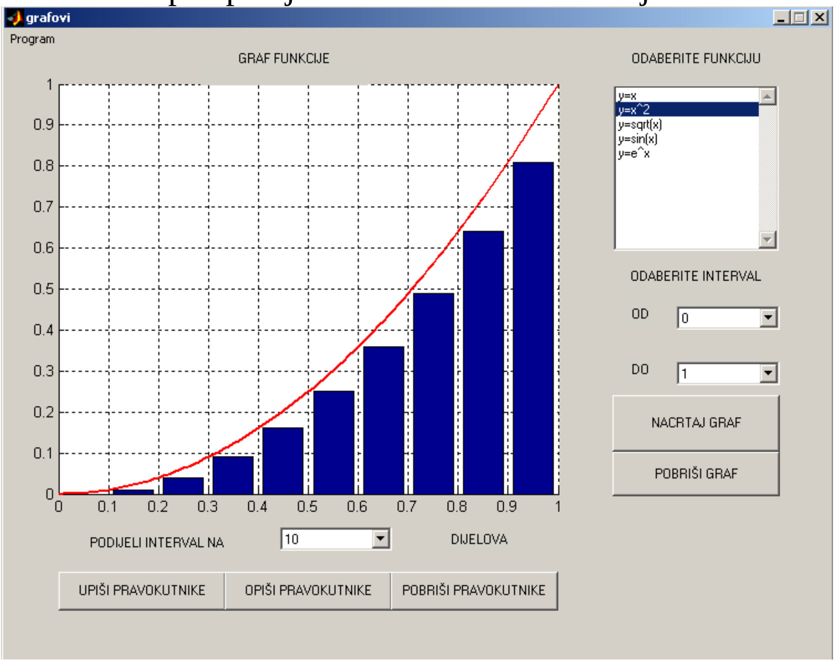
$$I = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma(k_i, \Delta_i) = \int_a^b f(x)dx$$

Funkcije za koje postoji Riemannov integral nazivamo **R-integrabilnim** funkcijama. Sve ograničene funkcije nemaju R-integral, ali svaka neprekinuta funkcija na nekom intervalu ima R-integral na tom intervalu.

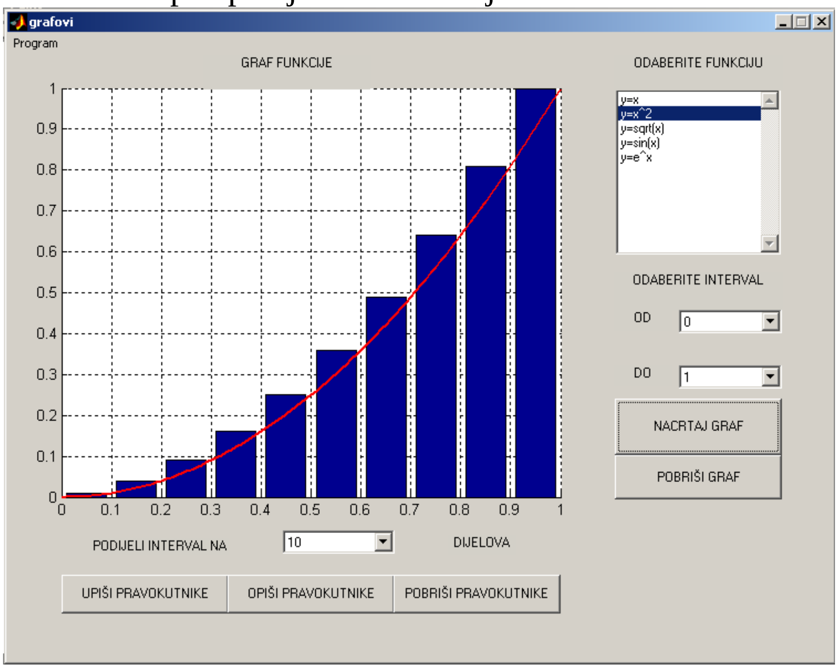
4. PRIMJER APROKSIMACIJE POVRŠINE ISPOD KRIVULJE PRAVOKUTNICIMA

Kao primjer aproksimacije površine ispod krivulje, tj.grafa funkcije uzet ćemo funkciju $\mathbf{f(x)=x^2}$ na intervalu **[0,1]**. Graf funkcije će biti nacrtan pomoću programa napravljena u pomoću aplikacije MATLAB 6.5. U programu imamo opcije za crtanje grafova više različitih funkcija na određenom intervalu, kao i opcije za upisivanje i opisivanje pravokutnika grafu odabrane funkcije. Također se može birati podjela zadanog intervala na određen broj jednakih dijelova.

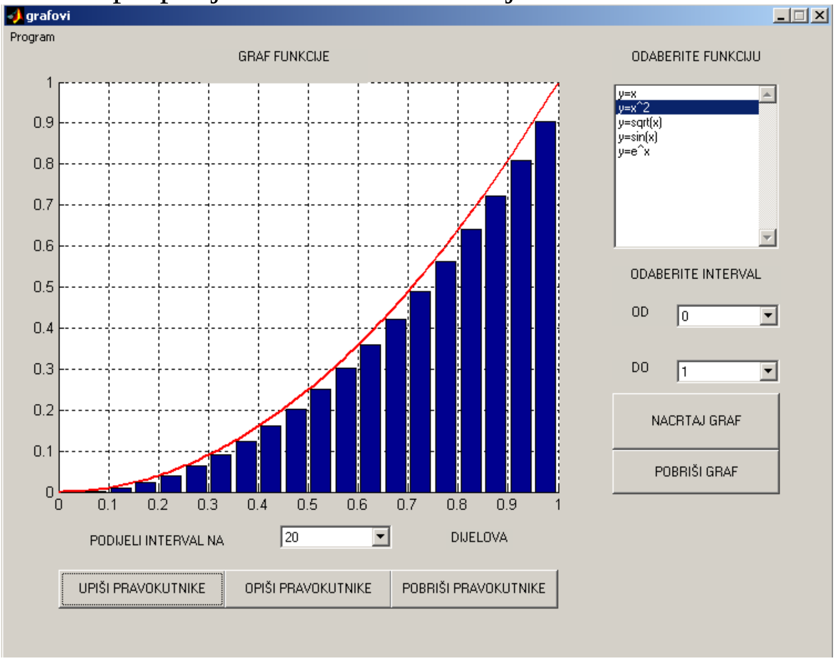
Upisani pravokutnici pri podjeli intervala na 10 dijelova:



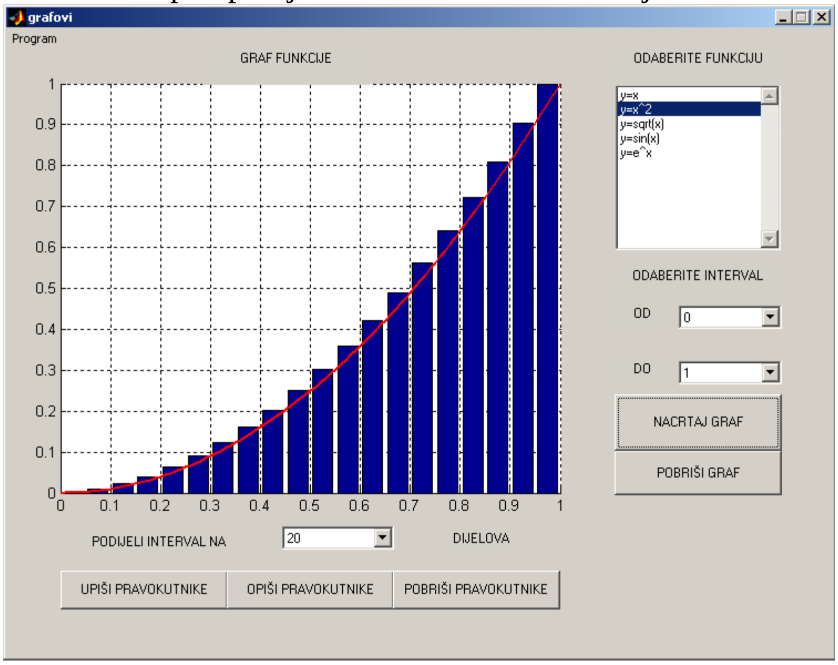
Opisani pravokutnici pri podjeli na 10 dijelova:



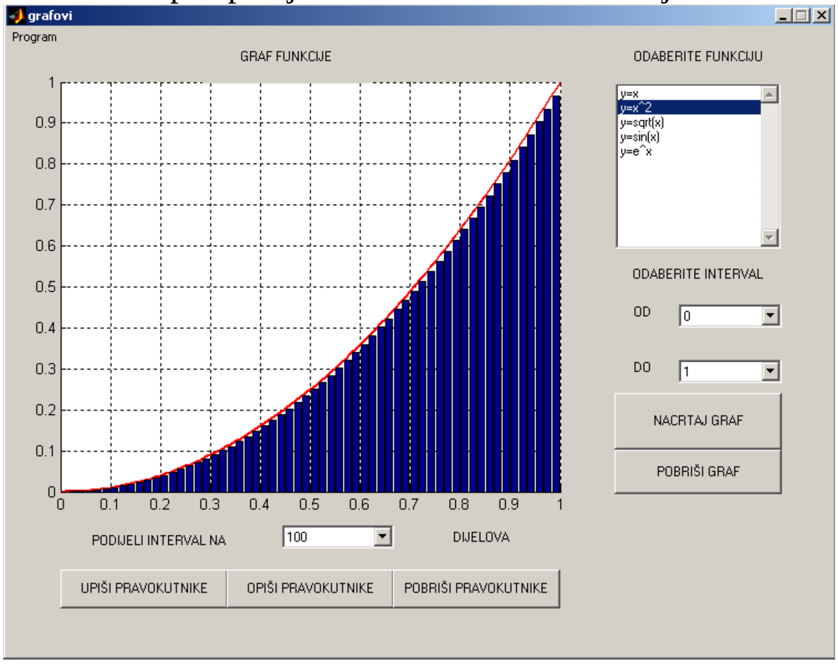
Upisani pravokutnici pri podjeli intervala na 20 dijelova:



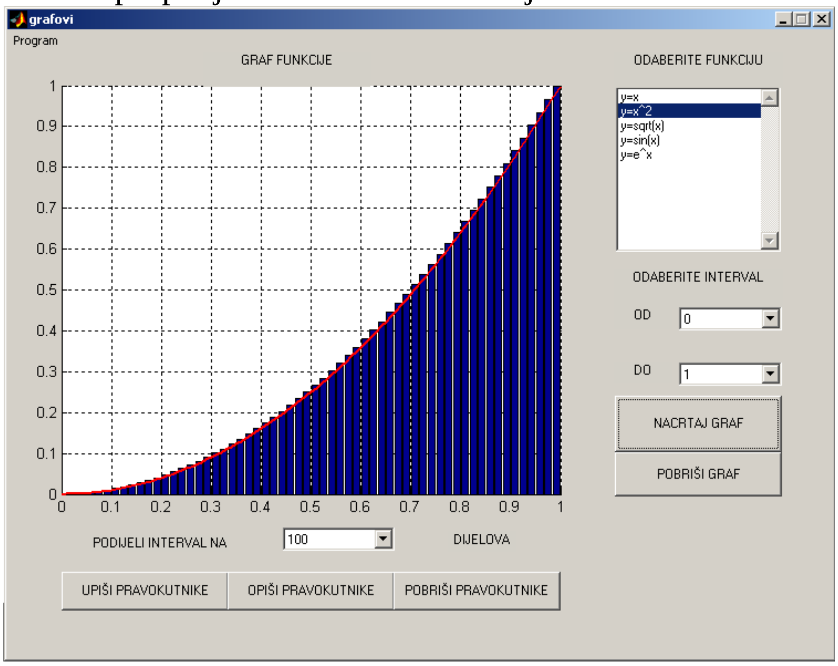
Opisani pravokutnici pri podjeli intervala na 20 dijelova:



Upisani pravokutnici pri podjeli intervala na 100 dijelova:

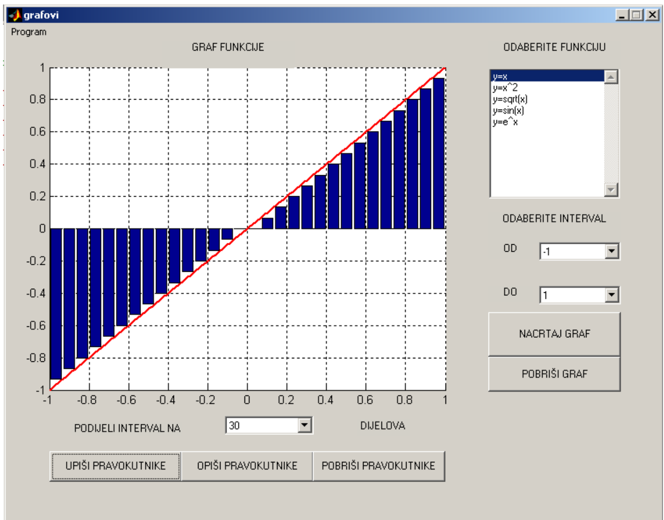


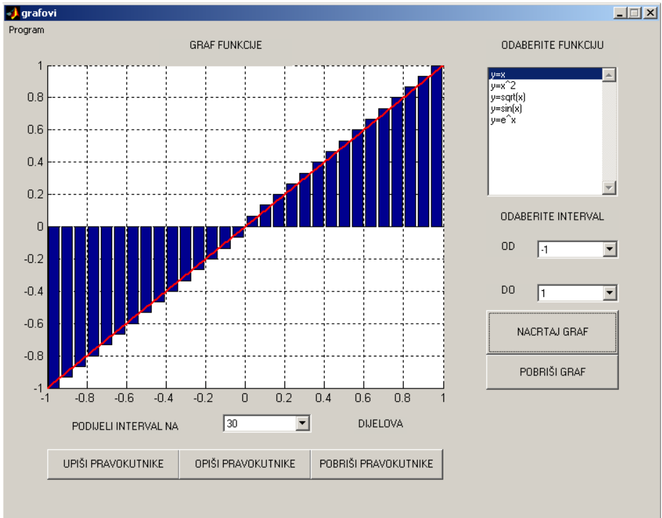
Opisani pravokutnici pri podjeli intervala na 100 dijelova:



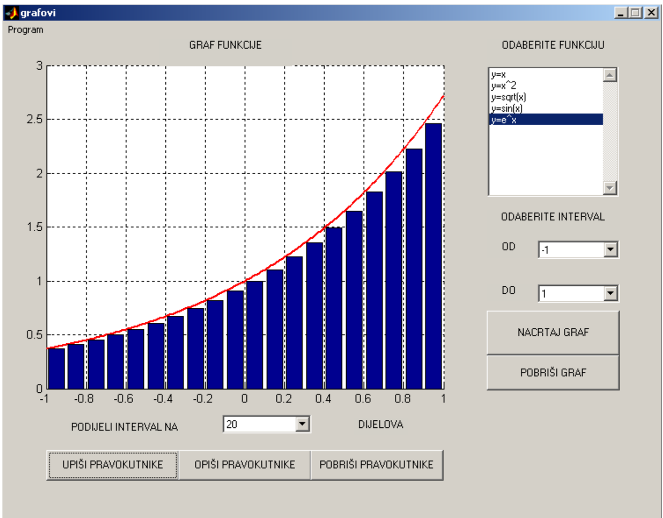
Iz ovih slika se vidi kako se donja i gornja suma približavaju pravoj vrijednosti površine kako se podjela intervala povećava, tj. kako se norma subdivizije $||\Delta||$ smanjuje. Kada $||\Delta||\rightarrow\mathbf{0}$ se sume izjednačuju i dobivamo Riemannov integral funkcije $f(x)=x^2$ na intervalu [0,1].

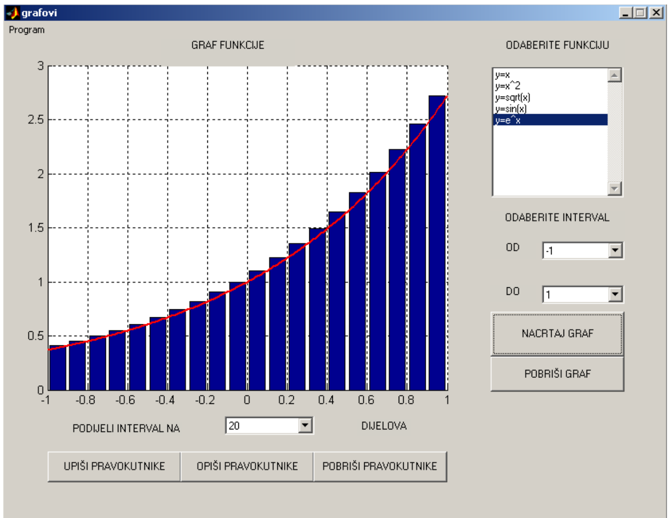
Tu su još neke slike dobivene istim programom:





f(x)=x na intervalu [-1,1]





$f(x)=e^x$ na [-1,1]

5. LITERATURA

- Petar Javor: Matematička Analiza I
- Dakić, Elezović: Matematika 4 – Funkcije, derivacije, integrali