VISOKA POSLOVNA ŠKOLA
STRUKOVNIH STUDIJA
ČAČAK

DIPLOMSKI RAD

Nizovna topologija na Booleovim algebrama

Mentor:_________ Student: ___________
Profesor: _________ Br.Indeksa: ___________

Sadržaj

Zahvale

Ovaj diplomski rad je rezultat moje suradnje sa prof. dr. sc. Mirnom Džamonja sa Sveučilišta East Anglia u engleskom gradiću Norwichu ovog listopada. Zato bih se najprije želio zahvaliti profesorici Džamonja na pozivu, nadasve srdačnoj suradnji i stručnoj pomoći. Zahvaljujem se i doc. dr. sc. Ivanu Tomašiću koji me povezao sa profesoricom Džamonja primivši me ovog proljeća u Londonu i koji mi je stručnim komentarima pomogao da ovaj rad bude još bolji. Posebno se zahvaljujem prof. dr. sc. Nenadu Antoniću koji me podupire tijekom cijeloga studija i bez kojega ove međunarodne suradnje zasigurno ne bi bilo.

Želio bih se zahvaliti i svojim prijateljima, Marku Paviću, čije mi je iskustvo puno pomoglo u organizaciji odlaska u Englesku, Siniši Miličiću na pomoći oko uređenja diplomskog rada i Braslavu Rabaru na dokazu jedne leme. Hvala i mami što je trpjela moja noćna dokazivanja, a i pomogla mi je u pisanju.

Konačno, zahvaljujem se Ministarstvu znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske što mi je financijski omogućilo jednomjesečni boravak u Ujedinjenom Kraljevstvu.

Uvod

Područje kojim se bavi ovaj rad relativno je nerazvijeno na Sveučilištu u Zagrebu. Tome u prilog naveo bih samo činjenicu da se, iako jednostavna, osnovna teorija Booleovih algebri ne obrađuje na dodiplomskom studiju matematike. Stoga sam, u želji da se rad ne poziva niti na jednu tvrdnju koja nije dokazana na studiju, a s namjerom da bude dostupan svima koji završe matematiku na našem Sveučilištu, obradio Booleove algebre od temelja. To je sadržaj drugog poglavlja, koje je uglavnom napisano na temelju [Si] i ponešto [Ha]. Taj dio, izuzev slabe distributivnosti koja je možda prespecifična, može poslužiti kao uvod u Booleove algebre, neovisno o ostatku rada.

Konačni cilj je izgraditi prirodnu topologiju na Booleovim algebrama i iznijeti neka njena svojstva, što kulminira teoremom o dekompoziciji iz [Ba2]. Topologiju sam na prijedlog voditeljice nazvao Maharamina topologija, u čast Dorothy Maharam koja ju je uvela u [Ma] 1946. godine. Međutim, da bi iole bilo jasno o čemu se radi, naslov rada je ipak 'Nizovna topologija na Booleovim algebrama', jer ona to zaista jest. Njome se bavi treće poglavlje, koje se temelji na radovima [Ba1] i [Ba2]. Budući da se radovi temelje na mnogim rezultatima koji nisu lako dostupni, trebao sam ih sam jasno formulirati i dokazati. Tu bih istaknuo primjer XXV. i teorem 3.19. koji nisu iz literature.

Da bi se izgradila nizovna topologija na Booleovim algrebrama, prvo je trebalo razviti teoriju definiranja topologije preko nizova, što je predmet prvog poglavlja. Tu teoriju je vjerojatno razvio Maurice Fréchet, iako mi njegovi radovi nisu bili dostupni, pa sam prvo poglavlje samostalno izradio. Teorija nije komplicirana i trebala bi biti lagani nastavak topoloških kolegija sa studija. Zato sam to stavio u prvo poglavlje, iako se logički prva dva poglavlja mogu čitati neovisno.

Nadam se da će ovaj rad biti razumljiv studentima matematike i da će ih zainteresirati za ovo područje, u kojemu ima mnogo prostora za daljnje istraživanje.

Poglavlje 1.

Nizovna topologija

1.1. Nizovne familije

Definicija 1.A

Fiksirani niz na skupu X je uređeni par $((x_n)_{n\in\omega}, x)$ niza u X i točke $x \in X$, i označavat ćemo ga $(x_n \underset{n}{\to} x)$. Točku x zovemo *fiksna točka* fiksiranog niza $(x_n \underset{n}{\to} x)$, ili kažemo da fiksirani niz $(x_n \underset{n}{\to} x)$ *konvergira* prema x. Kažemo da je fiksirani niz $(x_n \underset{n}{\to} x)$ *u* $A \subseteq X$ ako je $x_n \in A$ za svaki n. Kažemo da je fiksirani niz $(y_n \underset{n}{\to} x)$ *podniz* fiksiranog niza $(x_n \underset{n}{\to} x)$ ako je $(y_n)_n$ podniz od $(x_n)_n$ u uobičajenom smislu.

Fiksirani niz $(x \underset{n}{\to} x)$ zovemo *konstantan* fiksirani niz.

Nizovna familija na X je svaka familija $\mathcal{A}$ fiksiranih nizova na X. Ako je $(x_n \underset{n}{\to} x) \in \mathcal{A}$ kažemo da je fiksirani niz $(x_n \underset{n}{\to} x) \in \mathcal{A}$ iz $\mathcal{A}$ (da ne miješamo sa 'u' koji smo drugačije definirali) i da niz $(x_n)_n$ *konvergira* prema x u familiji $\mathcal{A}$.

Baza konvergencije na X je svaka nizovna familija $\mathcal{B}$ na X koja zadovoljava:

(K1) $(x \underset{n}{\to} x) \in \mathcal{B}$ za svaki $x \in X$,

(K2) svaki podniz elementa iz $\mathcal{B}$ je iz $\mathcal{B}$.

Baza konvergencije na X je *familija konvergencije* na X ako vrijedi još:

(K3) ako svaki podniz zadanog fiksiranog niza N na X ima podniz iz $\mathcal{K}$, onda je i $N \in \mathcal{K}$.

Baza konvergencije i familija konvergencije su *prave* ako

(K4) $(x_n \underset{n}{\to} x), (x_n \underset{n}{\to} y) \in \mathcal{B} \Rightarrow x = y$

Primijetimo da prava baza konvergencije ne može imati konstantan niz x-eva kojemu fiksna točka nije x. Jasno, ne može imati niti niz kojemu je neki podniz takav.

Naizgled čudno svojstvo (K3) iz definicije familije konvergencije ima dosta korisne posljedice.

Propozicija 1.1.
Neka je $\mathcal{K}$ familija konvergencije na X, $\{A_i : i \in K\}$ konačna particija od ω i $N = (x_n \underset{n}{\to} a)$ fiksirani niz u X. Ako su podnizovi $M_i = (y_n^{(i)} \underset{n}{\to} a)$ od N koji se sastoje od onih (x_n)-ova koji su u A_i, elementi od $\mathcal{K}$, onda je i $N \in \mathcal{K}$.

Dokaz:
Neka je $M = (x_{n_i} \underset{i}{\to} a)$ podniz od N. Beskonačno n_i-ova je u nekom A_i. Ti koji su u A_i čine podniz od M i od M_i, dakle podniz koji je iz $\mathcal{K}$. Po svojstvu (K3) iz definicije, $M \in \mathcal{K}$. ■

Propozicija 1.2.
Neka je $\mathcal{K}$ familija konvergencije na X, $N = (x_n \underset{n}{\to} a) \in \mathcal{K}$ i $\sigma\colon \omega \to \omega$ permutacija. Tada je i

$$N' = (x_{\sigma(n)} \underset{n}{\to} a) \in \mathcal{K}.$$

Dokaz:
Neka je M podniz od N'. Tada je $M = (x_{\tau(n)} \underset{n}{\to} a)$ za neku injekciju $\tau\colon \omega \to \omega$. Jasno, τ ima strogo rastući podniz, nazovimo ga sa ν. Tada je $M' = (x_{\nu(n)} \underset{n}{\to} a)$ podniz od M i od N, koji je radi ovoga drugoga iz $\mathcal{K}$. Po svojstvu (K3) je onda i $N' \in \mathcal{K}$. ■

Korolar 1.3.
Neka je $\mathcal{K}$ familija konvergencije na X i neka su $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ nizovi koji nemaju konstantan podniz, a slika im je ista. Ako je $(x_n \underset{n}{\to} a) \in \mathcal{K}$ onda je $(y_n \underset{n}{\to} a) \in \mathcal{K}$.

1.2. Nizovan topološki prostor

Definicija 1.B
Topološki prostor $T = (X, \tau)$ je *nizovan* ako je u njemu $A \subseteq X$ zatvoren čim sadrži limese svih nizova s elementima u A.
Topološki prostor je *pravi* ako svaki niz u njemu konvergira prema najviše jednoj točki.

Primijetimo da je svaki Hausdorffov prostor pravi.

U ovom radu će uglavnom svi topološki prostori biti pravi nizovni.

Definicija 1.C
Neka je $T = (X, \tau)$ (bilo koji) topološki prostor. *Familija konvergencije topološkog prostora* T je:

$$\mathcal{K}_T = \{(x_n \underset{n}{\to} x) : (x_n)_n \text{ niz u } X \text{ koji konvergira prema } x \in X \text{ u topologiji } T\}.$$

Primijetimo da $(x_n \underset{n}{\to} x) \in \mathcal{K}_T$ konvergira prema x u prostoru T ako i samo ako konvergira prema x u familiji $\mathcal{K}_T$, i to ćemo često tako zapisivati.

Propozicija 1.4.
Neka je T topološki prostor. Familija $\mathcal{K}_T$ je zaista familija konvergencije. Ako je T pravi, i $\mathcal{K}_T$ je prava.

Dokaz:
Provjerimo točke iz definicije (prave) familije konvergencije.

(K1) Jasno.

(K2) Jasno.

(K3) Pretpostavimo suprotno, tj. da neki niz $N = (x_n)_n$ kojemu svaki podniz ima gomilište x ne konvergira prema x. Tada oko x postoji okolina O izvan koje je ostalo beskonačno elemenata niza N. Oni čine podniz kojemu x ne može biti gomilište.

(K3) Jasno. ∎

Definicija 1.D
Neka je $\mathcal{B}$ baza konvergencije na X. Definirajmo funkciju *limitiranja*

$$u_{\mathcal{B}}(A) = \{x \in X : \text{postoji } (x_n \underset{n}{\to} x) \in \mathcal{B} \text{ u } A\}.$$

Često nećemo pisati indeks iza u ako je iz konteksta jasno o čemu se radi, ili ako nije bitno.

Propozicija 1.5.

Neka je $\mathcal{B}$ baza konvergencije na X. Skupovi $A \subseteq X$ za koje je $u(A) = A$ zadovoljavaju aksiome zatvorenih skupova.

Dokaz:

$u(\emptyset) = \emptyset$ i $u(X) = X$.

Neka je $u(A_i) = A_i$ za $i \in I$. Ako je $(x_n \underset{n}{\to} x) \in \mathcal{B}$ u presjeku $\bigcap A_i$, onda je on u svakom A_i, pa je $x \in A_i$ za svaki i, tj. $x \in \bigcap A_i$. Dakle, $u(\bigcap A_i) = \bigcap A_i$.

Neka je $u(A) = A$, $u(B) = B$ i neka je $(x_n \underset{n}{\to} x) \in \mathcal{B}$ u $A \cup B$. Možemo pretpostaviti da je beskonačno elemenata niza $(x_n)_n$ u A, pa postoji podniz $(y_n \underset{n}{\to} x)$ od $(x_n \underset{n}{\to} x)$ koji je u A. Tada je $(y_n \underset{n}{\to} x) \in \mathcal{B}$, pa je $x \in A \subseteq A \cup B$. Dakle, $u(A \cup B) = A \cup B$. ∎

Definicija 1.E

Neka je $\mathcal{B}$ baza konvergencije na X. *Inducirani topološki prostor* $T_{\mathcal{B}} = (X, \tau_{\mathcal{B}})$ je topološki prostor na X u kojem je $A \subseteq X$ zatvoren ako i samo ako je $u_{\mathcal{B}}(A) = A$.

Propozicija 1.6.

Za svaku bazu konvergencije $\mathcal{B}$ je $\mathcal{B} \subseteq K_{T_{\mathcal{B}}}$. (Tj. ako je $(x_n \underset{n}{\to} x) \in \mathcal{B}$ onda $(x_n)_n$ konvergira prema x u topološkom prostoru $T_{\mathcal{B}}$.) Štoviše, $T_{\mathcal{B}}$ je upravo najfiniji topološki prostor s tim svojstvom.

Dokaz:

Neka je $(x_n \underset{n}{\to} x) \in \mathcal{B}$ i neka je O otvorena okolina oko x u $T_{\mathcal{B}}$. Pretpostavimo da se beskonačno članova niza $(x_n)_n$ nalaze izvan O, dakle u $X \backslash O$. Tada njih možemo smjestiti u podniz $(y_n)_n$, za koji također vrijedi $(y_n \underset{n}{\to} x) \in \mathcal{B}$. Kako je $X \backslash O$ zatvoren, po definiciji topologije bi trebalo biti $x \in X \backslash O$, što nije. Dakle, gotovo svi članovi niza $(x_n)_n$ su u O. O je bila proizvoljna otvorena okolina oko X, pa zaključujemo da $(x_n)_n$ konvergira prema x.

Neka je T' neki drugi topološki prostor s gornjim svojstvom. Ako je skup A zatvoren u T' onda je limes svakog konvergentnog niza u A isto u A, pa po definiciji inducirane topologije zatvoren u T. Dakle, T' je grublji od T. ∎

Propozicija 1.7.

Neka je $\mathcal{B}$ baza konvergencije. Topološki prostor $T_{\mathcal{B}}$ je nizovan. Ako je $\mathcal{B}$ prava baza konvergencije, i $T_{\mathcal{B}}$ je pravi topološki prostor.

Dokaz:

Iz leme i definicije odmah slijedi da je $T_{\mathcal{B}}$ nizovna topologija.

Dokažimo da je prava za pravu bazu $\mathcal{B}$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji niz $(x_n)_n$ koji konvergira prema dvije različite točke, a i b. Gledamo slučajeve:

I. Niz $(x_n)_n$ ima podniz koji se sastoji samo od a-ova ili b-ova, pretpostavimo a-ova. Kako $(x)_n$ konvergira prema b, $\{a\}$ nije zatvoren. Sada po definiciji topologije postoji $(y_n \underset{n}{\rightarrow} c) \in \mathcal{B}$ u $\{a\}$, $c \neq a$. No y_n mora biti konstantan niz a-ova, pa je $a = c$.

II. U protivnom možemo pretpostaviti da niti a niti b nisu u slici S niza $(x_n)_n$ (ako jesu, izbacimo ih i gledamo podniz za koji vrijedi sve isto). $S \cup \{a\}$ nije zatvoren jer $(x_n)_n$ konvergira prema b. Po definiciji topologije postoji $(y_n \underset{n}{\rightarrow} c) \in \mathcal{B}$ u $S \cup \{a\}$ takav da $c \notin S \cup \{a\}$, pa i $c \neq a$. Zato niz $(y_n \underset{n}{\rightarrow} c)$ ne može imati konstantan podniz a-ova jer bi i njegova fiksna točka bila $c \neq a$. Sada iz $(y_n)_n$ možemo izbaciti eventualno konačno a-ova, pa pretpostavimo da je $(y_n \underset{n}{\rightarrow} c)$ u S, tj. sastoji se samo od x_n-ova. Niti jedan x_n se ne može u njemu javljati beskonačno puta, jer bi onda opet imao konstantan podniz kojemu je fiksna točka c različita od elemenata. Zato je $(y_n)_n$ je podniz od $(x_{\sigma(n)})_n$, gdje je $\sigma \colon \omega \to \omega$ permutacija za koju bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je identiteta. Zato $(y_n)_n$ teži u a, a po propoziciji 1.6. teži i u c.

   Ponovimo isti postupak sa $(y_n)_n$ kao i sa $(x_n)_n$ i nađimo mu podniz $(z_n)_n$ takav da je $(z_n \underset{n}{\rightarrow} d) \in \mathcal{B}$, $d \neq c$. Kako je $(z_n \underset{n}{\rightarrow} c)$ podniz od $(y_n \underset{n}{\rightarrow} c) \in \mathcal{B}$, vrijedi i $(z_n \underset{n}{\rightarrow} c) \in \mathcal{B}$, pa je $c = d$, dakle $\mathcal{B}$ nije prava. ■

Teorem 1.8. (Osnovni teorem nizovne topologije)

1. *Neka je $\mathcal{K}$ prava familija konvergencije na X. Tada je $\mathcal{K}_{T_{\mathcal{K}}} = \mathcal{K}$.*

2. *Neka je $T = (X, \tau)$ nizovni topološki prostor. Tada je $T_{\mathcal{K}_T} = T$.*

Dokaz:

1. Iz propozicije 1.6. odmah slijedi $\mathcal{K} \subseteq K_{T_{\mathcal{K}}}$.

   Obratno, neka $(x_n)_n$ konvergira prema a u prostoru $T_{\mathcal{K}}$. Treba dokazati da je $(x_n \underset{n}{\rightarrow} a) \in \mathcal{K}$. Neka je $(y_n \underset{n}{\rightarrow} a)$ proizvoljan podniz od $(x_n \underset{n}{\rightarrow} a)$. Dovoljno je dokazati da $(y_n \underset{n}{\rightarrow} a)$ ima podniz u $\mathcal{K}$. Niz $(y_n)_n$ također konvergira prema a u topologiji $\tau_{\mathcal{K}}$. Proučimo sada dva slučaja.

   I. Niz y_n je beskonačno puta jednak a. Tada $(y_n \underset{n}{\rightarrow} a)$ ima konstantan podniz koji je onda iz $\mathcal{K}$.

II. U protivnom možemo pretpostaviti da y_n nikad nije jednak a. Tada slika S od $(y_n)_n$ nije zatvorena (u topologiji $\tau_{\mathcal{K}}$) jer je limes tog niza izvan nje. Po definiciji topologije onda mora postojati $(z_n \underset{n}{\rightarrow} b) \in \mathcal{K}$ u S gdje $b \notin S$. Slično kao u dokazu prethodne propozicije niti jedan y_n se ne može u $(z_n)_n$ javljati beskonačno puta. Zato je $(z_n)_n$ podniz od $(y_{\sigma(n)})_n$, gdje je $\sigma\colon \omega \to \omega$ permutacija, pa $(z_n)_n$ teži u a, a po propoziciji 1.6. teži i u b. Po prethodnoj propoziciji je $T_{\mathcal{K}}$ prava topologija, pa je $a = b$, dakle $(z_n \underset{n}{\rightarrow} a)$ je iz $\mathcal{K}$.

2. Konvergentni niz u zatvorenom skupu A ima limes u A iz čega slijedi da je svaki zatvoreni u T zatvoren u $\mathcal{K}_T$. Obrat je definicija inducirane topologije. **Q.E.D.**

Gornjim smo teoremom uveli novi način definiranja prave nizovne topologije, preko pravih familija konvergencije. Za neprave to ne bi bilo moguće, što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer I

Neka je $\mathcal{K} = \{(x_n \underset{n}{\rightarrow} x) : (x_n)_n$ ograničen niz u $\omega\}$ nizovna familija na ω. Primijetimo da nema uvjeta za fiksnu točku. Lako se vidi da je $\mathcal{K}$ familija konvergencije, očito neprava. Kako svaki fiksirani niz iz $\mathcal{K}$ teži svugdje, $u(A) = \omega$ čim je A neprazan, dakle topologija $T_{\mathcal{K}}$ je indiskretna. U indiskretnoj topologiji svaki niz je konvergentan i teži svugdje, pa tako i neograničeni nizovi. Zato je $\mathcal{K}_{T_{\mathcal{K}}} \neq \mathcal{K}$.

Kao kod većine načina definiranja topologije, ni ovdje nam ne treba cijela familija konvergencije, nego samo baza konvergencije, što opravdava njen naziv.

Definicija 1.F

Neka je $\mathcal{B}$ baza konvergencije na X. Familija konvefgencije *pridružena* bazi konvergencije $\mathcal{B}$, u oznaci $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$, je najmanja familija konvergencije na X koja sadrži $\mathcal{B}$. Kažemo i da je baza konvergencije $\mathcal{B}$ pridružena familiji konvergencije $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$.
Dvije baze konvergencije su *ekvivalentne* ako su pridružene istoj familiji konvergencije.

Očito je proizvoljni presjek familija konvergencije opet familija konvergencije, pa gore definirana pridružena familija konvergencije postoji i jedinstvena je.

Propozicija 1.9.

Neka je $\mathcal{B}$ baza konvergencije na X. Vrijedi:

1. $\mathcal{K}_{\mathcal{B}} = \{N$ *fiksirani niz u* X: *svaki kodniz od* N *ima podniz iz* $\mathcal{B}\}$.

2. *Familija konvergencije $\mathcal{K}$ je pridružena bazi konvergencije $\mathcal{B}$ ako i samo ako sadrži $\mathcal{B}$ i svaki fiksirani niz iz nje ima podniz iz $\mathcal{B}$.*

Dokaz:

1. Nazovimo desnu stranu jednakosti sa $\mathcal{D}$. Lako se provjeri da je $\mathcal{D}$ familija konvergencije i da sadrži $\mathcal{B}$, dakle $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{K}_{\mathcal{B}}$. Iz definicije familije konvergencije je jasno da svaka familija konvergencije koja sadrži $\mathcal{B}$ mora sadržavati i $\mathcal{D}$, dakle $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{K}_{\mathcal{B}}$.

2. Iz gornje formule se lako vidi da $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ zadovoljava traženi uvjet.

   Obratno, neka $\mathcal{K}$ zadovoljava uvjet. Jasno je $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{K}_{\mathcal{B}}$. Neka je $N \in \mathcal{K}$ neki fiksirani niz i M neki njegov podniz. Tada je i $M \in \mathcal{K}$, pa iz uvjeta M ima podniz u $\mathcal{B}$, dakle N je iz $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ prema gornjoj formuli, tj. $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_{\mathcal{B}}$. ∎

Propozicija 1.10.
Svaka baza konvergencije pridružena pravoj familiji konvergencije je prava i obrnuto.

Dokaz:
Dokažimo obrate po kontrapoziciji.
Ako baza nije prava, nije ni pridružena familija, jer je ona nadskup.
Ako familija $\mathcal{K}$ nije prava, postoje $(x_n \underset{n}{\to} a), (x_n \underset{n}{\to} b) \in \mathcal{K}$, $a \neq b$. Tada postoji podniz $(y_n \underset{n}{\to} a) \in \mathcal{B}$, za koji je i dalje $(x_n \underset{n}{\to} b) \in \mathcal{K}$, te on ima podniz za koji je $(z_n \underset{n}{\to} a), (z_n \underset{n}{\to} b) \in \mathcal{B}$, tj. $\mathcal{B}$ nije prava. ∎

Propozicija 1.11.

1. *Neka je $\mathcal{K}$ familija konvergencije na X pridružena bazi konvergencije $\mathcal{B}$. Tada je $u_{\mathcal{K}} = u_{\mathcal{B}}$.*

2. *Neka su $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ ekvivalentne baze konvergencije. Tada je $u_{\mathcal{B}_1} = u_{\mathcal{B}_2}$.*

Dokaz:

1. Neka je $A \subseteq X$.

   $u_{\mathcal{K}}(A) \supseteq u_{\mathcal{B}}(A)$ jasno.

   Neka je $x \in u_{\mathcal{K}}(A)$, tj. postoji $(x_n \underset{n}{\to} x) \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ u A. On ima podniz $(y_n \underset{n}{\to} x) \in \mathcal{B}$, koji je isto u A, pa je $y \in u_{\mathcal{B}}(A)$. Dakle $u_{\mathcal{K}}(A) \subseteq u_{\mathcal{B}}(A)$.

2. Jasno iz 1. ∎

Korolar 1.12.

1. *Neka je $\mathcal{K}$ familija konvergencije na X pridružena bazi konvergencije $\mathcal{B}$. Tada je $T_{\mathcal{K}} = T_{\mathcal{B}}$.*
2. *Neka su $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ ekvivalentne baze konvergencije. Tada je $T_{\mathcal{B}_1} = T_{\mathcal{B}_2}$.*

Propozicija 1.13.

1. *Ako je $\mathcal{B}$ prava baza konvergencije, onda je $\mathcal{K}_{\mathcal{B}} = \mathcal{K}_{T_{\mathcal{B}}}$.*
2. *Prave baze konvergencije $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ su ekvivalentne ako i samo ako je $T_{\mathcal{B}_1} = T_{\mathcal{B}_2}$.*

Dokaz:

1. Jasno iz prethodne propozicije i teorema 1.8.
2. Jasno iz 1. ■

Definicija 1.G
Neka je T topološki prostor. Definirajmo *funkciju limitiranja* na prostoru T:

$$u_T = u_{\mathcal{K}_T}.$$

Propozicija 1.14.
Za svaku bazu konvergencije $\mathcal{B}$ na X je $u_{\mathcal{B}} = u_{T_{\mathcal{B}}}$.

Primijetimo da je ova propozicija netrivijalna samo u slučaju neprave baze konvergencije, jer je inače očita po prethodnoj propoziciji.

Dokaz:
Neka je $A \subseteq X$. Očito je $u_{\mathcal{B}}(A) \subseteq u_{T_{\mathcal{B}}}(A)$.
U obratu, neka je $a \in u(A) \backslash A$, pa postoji $(x_n \underset{n}{\to} a) \in \mathcal{K}_{T_{\mathcal{B}}}$ u A. Tada slika S niza $(x_n)_n$ nije zatvorena, pa postoji $(y_n \underset{n}{\to} a) \in \mathcal{B}$ u S, dakle i u A. ■

Zbog zadnje propozicije, funkcija limitiranja nizovne topologije ovisi samo o topologiji, i svejedno je koju bazu konvergencije za induciranje te topologije koristimo u definiciji funkcije.

Radi jednostavnosti ćemo nizovne topologije često definirati pomoću bilo koje nizovne familije $\mathcal{A}$ na X ovako: $T_{\mathcal{A}} = T_{\mathcal{B}}$ gdje je $\mathcal{B}$ najmanja baza konvergencije koja sadrži $\mathcal{A}$ (isto bismo dobili da baratamo sa familijama konvergencije, očito). Lako se vidi da je

$$\mathcal{B} = \{(x \underset{n}{\rightarrow} x) : x \in X\} \cup \{M : M \text{ je podniz nekog } N \in \mathcal{A}\}$$

Direktno definiranje topologije preko nizovne familije na isti način kao sa bazama konvergencije nije moguće, što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer II

Proučimo topološki prostor $T_{\mathcal{A}}$ na $\omega + 1$ gdje je $\mathcal{A} = \{(n \underset{n}{\rightarrow} \omega)\}$.

Dobijemo uobičajenu uređajnu topologiju na $\omega + 1$.

Ako bismo definirali 'zatvorene' skupove direktno iz $\mathcal{A}$ kao sa bazama konvergencije, skupovi parnih i neparnih brojeva bili bi 'zatvoreni', a njihova unija ω ne bi bila 'zatvorena'.

1.3. Zatvarač i neprekidnost

Proučimo sada kako se ponaša funkcija zatvarača u nizovnoj topologiji.

Definirajmo za sve redne brojeve α rekurzivno:

$$u^0(A) = A,$$

$$u^{\alpha+1}(A) = u(u^{\alpha}(A)),$$
$$u^{\alpha}(A) = \bigcup_{\beta<\alpha} u^{\beta}(A) \text{ za granične } \alpha.$$

Propozicija 1.15.

Zatvarač skupa A u nizovnom topološkom prostoru T je

$$cl\,(A) = u_T^{\omega_1}(A).$$

Dokaz:

Transfinitnom indukcijom se lako dobije

$$A \subseteq u^{\alpha}(A) \subseteq u^{\beta}(A) \subseteq \mathrm{cl}\,(A)$$

čim je $\alpha < \beta$.

Dovoljno je još pokazati da je

$$A' := u^{\omega_1}(A) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} u^{\alpha}(A)$$

zatvoren skup u topologiji $\tau_{\mathcal{B}}$, tj. treba pokazati da je za svaki fiksirani niz $(x_n \underset{n}{\rightarrow} x) \in \mathcal{K}_T$ u A' njegova fiksna točka $x \in A'$.

Pa neka je $(x_n \underset{n}{\rightarrow} x) \in \mathcal{K}_T$ fiksirani niz u A', tj. slika S od $(x_n)_n$ je podskup od A'. Kako je S prebrojiv, on se nalazi u prebrojivo skupova $u^{\alpha}(A)$, $\alpha < \omega_1$. Zbog toga je supremum β svih takvih α također manji od ω_1. Kako skupovi $u^{\alpha}(A)$ rastu s α, $S \subseteq u^{\beta}(A)$, pa je $x \in u^{\beta+1}(A) \subseteq A'$. ∎

Pokušajmo karakterizirati neprekidne funkcije. Neka su $T_1 = (X, \tau_1)$ i $T_2 = (Y, \tau_2)$ topološki prostori. Znamo da je funkcija $f\colon X \to Y$ neprekidna ako i samo ako za svaki $A \subseteq X$ vrijedi

$$f(\mathrm{cl}\,_1(A)) \subseteq \mathrm{cl}\,_2(f(A)).$$

Za nizovne topologije vrijedi slična relacija:

Propozicija 1.16.

Neka su $T_1 = (X, \tau_1)$ i $T_2 = (Y, \tau_2)$ nizovni topološki prostori i $f : X \to Y$ funkcija. Ekvivalentno je:

(i) Funkcija f je neprekidna.

(ii) Za svaki $(x_n \underset{n}{\rightarrow} x) \in \mathcal{K}_{T_1}$ je $(f(x_n) \underset{n}{\rightarrow} f(x)) \in \mathcal{K}_{T_2}$.

(iii) Za svaki $A \subseteq X$ je $f(u_{T_1}(A)) \subseteq u_{T_2}(f(A))$.

Dokaz:

(i) ⇒ (ii): Znamo od prije.

(ii) ⇒ (iii): Neka je $A \subseteq X$ i $a \in f(u_{T_1}(A))$, tj. $a = f(b)$ za neki $b \in u_{T_1}(A)$. Zato postoji $(x_n \underset{n}{\rightarrow} b) \in \mathcal{K}_{T_1}$. Po (ii) je onda $(f(x_n) \underset{n}{\rightarrow} f(b)) \in \mathcal{K}_{T_2}$, dakle $a = f(b) \in u_{T_2}(f(A))$.

(iii) ⇒ (i): Neka je $f(u_{T_1}(A)) \subseteq u_{T_2}(f(A))$ za svaki $A \subseteq X$. Transfinitnom indukcijom se direktno dobije da je

$$f(u^{\alpha}_{T_1}(A)) \subseteq u^{\alpha}_{T_2}(f(A))$$

iz čega slijedi da je $f(\mathrm{cl}\,_{T_1}(A)) \subseteq \mathrm{cl}\,_{T_2}(f(A))$. Dakle, f je neprekidna. ∎

Korolar 1.17.

Neka su $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ prave baze konvergencije na X i Y redom, te neka je $f\colon X \to Y$ funkcija. Ako za svaki $(x_n \xrightarrow[n]{} x) \in \mathcal{B}_1$ vrijedi $(f(x_n) \xrightarrow[n]{} f(x)) \in \mathcal{B}_2$ onda je f neprekidna sa $T_{\mathcal{B}_1}$ na $T_{\mathcal{B}_2}$.

Dokaz:

Dokazat ćemo tvrdnju (ii) iz propozicije. Radi točke 1. propozicije 1.13. dovoljno je dokazati da iz $(x_n \xrightarrow[n]{} a) \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}_1}$ slijedi $(f(x_n) \xrightarrow[n]{} f(a)) \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}_2}$.

Neka je $(f(y_n) \xrightarrow[n]{} f(a))$ podniz od $(f(x_n) \xrightarrow[n]{} f(a))$. Tada je jasno $(y_n \xrightarrow[n]{} a)$ podniz od $(x_n \xrightarrow[n]{} a)$, pa je i on iz $\mathcal{K}_{\mathcal{B}_1}$, dakle ima podniz $(z_n \xrightarrow[n]{} a)$ koji je iz $\mathcal{B}_1$. Sada je po uvjetu iz korolara $(f(z_n) \xrightarrow[n]{} a) \in \mathcal{B}_2$. Po formuli u točki 1. propozicije 1.9. dobijamo da je $(f(x_n) \xrightarrow[n]{} f(a)) \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}_2}$. ∎

1.4. Fréchetov prostor

Definicija 1.H

Topološki prostor $T = (X, \tau)$ je *Fréchetov* ako je za svaki $A \subseteq X$ vrijedi

$$cl_T(A) = u_T(A).$$

Propozicija 1.18.

Nizovni topološki prostor T Fréchetov ako i samo ako je u njemu $u_T^2 = u_T$.

Dokaz:

Jasno iz propozicije 1.15. ∎

Propozicija 1.19.

Za topološki prostor $T = (X, \tau)$ vrijede implikacije:

T zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti $\Rightarrow$ T je Fréchetov $\Rightarrow$ T je nizovan.

Dokaz:

1. Neka T zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti i neka je $A \subseteq X$. Jasno je $u_T(A) \subseteq \mathrm{cl}_T(A)$.

   Neka je $x \in \mathrm{cl}_T(A)$. Oko x postoji prebrojiva baza okolina $(O_i)_{i \in \omega}$. $U_i := \bigcap_{j \le i} O_j$ je također baza okolina, i to padajuća. Neka je $x \in cl_T(A)$. Svaki U_i sječe A, pa neka je $(x_i \in U_i \cap A)_{i\in\omega}$. Niz $(x_i)_i$ je u A i konvergira prema x, pa je $x \in u(A)$. Dakle, T je Fréchetov.

2. Neka je T Fréchetov. $A \subseteq X$ je zatvoren ako i samo ako je $A = \mathrm{cl}\,(A)$ tj. $A = u(A)$ tj. ako i samo ako svaki konvergentan niz u A konvergira u A. To je upravo definicija nizovne topologije. ■

Obrati gornjih implikacija ne vrijede što pokazuju sljedeći primjeri.

Primjer III (Frévhetov prostor za koji ne vrijedi prvi aksiom prebrojivosti)
Na $\omega_1 + 1$ definirajmo topologiju $\tau = \tau_{\mathcal{A}}$ preko nizovne familije

$$\mathcal{A} = \{(x_n \underset{n}{\to} \omega_1) : (x_n)_n \text{ strogo rastući niz u } \omega_1\}.$$

Funkcija limitiranja može skupu dodati samo ω_1 ako ga već nema u skupu. Ako ga ne doda odmah, neće ni ako ponovimo funkciju, dakle $u^2 = u$, tj. T je Fréchetov.
Svaki skup koji sadrži ω_1 je zatvoren, dakle $\{x\}$ je otvoren za svaki $x \in \omega_1$ što znači da je restrikcija topologije T na ω_1 diskretna.
Lako se vidi da je $A \subseteq \omega_1$ zatvoren ako i samo ako je konačan.
Pretpostavimo da vrijedi prvi aksiom prebrojivosti, tj. da oko ω_1 postoji prebrojiva baza okolina $(A_i)_{i\in\omega}$. Komplement svakog A_i je zatvoren podskup od ω_1 , dakle konačan. Tada je komplement od $\bigcap_{i\in\omega} A_i$ prebrojiv, pa nije cijeli ω_1, tj. postoji $x \in \bigcap_{i\in\omega} A_i \setminus \{\omega_1\}$. $(\omega_1 + 1)\setminus\{x\}$ je okolina oko ω_1 koja nije nadskup niti jednog A_i.
Dakle, $(A_i)_i$ nije baza okolina oko ω_1.

Primjer IV (Nizovan topološki prostor koji nije Fréchetov)
Neka je formalno

$$A = \{x_{n,i} : n, i \in \omega\},$$

$$B = \{y_n : n \in \omega\},$$

$$C = \{z\},$$

$$X = A \cup B \cup C.$$

Definirajmo nizovnu familiju na X

$$\mathcal{A} = \{(x_{ni} \underset{i}{\to} y_n) : n \in \omega\} \cup \{(y_n \underset{n}{\to} z)\}.$$

U prostoru $T_{\mathcal{A}}$ je očito

$$u(A) = A \cup B,$$

$$u^2(A) = A \cup B \cup C = X \quad \Rightarrow \quad \mathrm{cl}\, a = X.$$

Gornji primjer nas motivira na sljedeću karakterizaciju.

Teorem 1.20.
Neka je $T = (X, \tau)$ pravi nizovan topološki prostor. T je Fréchetov ako i samo ako za svaku beskonačnu matricu $(\xi_{n,i})_{n,i\in\omega}$ u X, niz $(x_n)_n$ u X i $a \in X$ za koje je $x_n \neq a$ za svaki n, te je $(\xi_{n,i} \underset{i}{\to} x_n) \in \mathcal{K}_T$ za svaki n i $(x_n \underset{n}{\to} a) \in \mathcal{K}_T$ postoji funkcija $f\colon \omega \to \omega$ takva da je $(\xi_{n,f(n)} \underset{n}{\to} a) \in \mathcal{K}_T$.

Dokaz:

Neka T nije Fréchetov. Tada je $u^2(A) \neq u(A)$ za neki A. Neka je $a \in u^2(A)\backslash u(A)$. Tada postoji niz $(x_n)_n$ u $u(A)$ koji konvergira prema a (jasno, nikada nije jednak a). Tada postoje nizovi $(\xi_{n,i})_i$ koji konvergiraju prea x_n za svaki n. Kada bi za ove ξ_{ni}, x_n, a postojala spomenuta funkcija, onda bi bilo $a \in u(A)$.

Obratno, neka je T Fréchetov i neka su $\xi_{ni}, x_n, a \in X$ za koje vrijede uvjeti iz teorema. Prvo osigurajmo da je $a \neq \xi_{ni}$ za sve n i i. Ako bi u nekom nizu $(\xi_{ni})_i$ bilo beskonačno članova jednakih a, taj niz bi imao podniz koji u $\mathcal{K}_T$ konvergira prema a i prema $x_n \neq a$, što ne može biti jer je $\mathcal{K}_T$ prava. Dakle, u svakom nizu ih ima konačno, pa ih možemo izbaciti. Od sada pretpostavljamo da je $a \neq \xi_{n,i}$ za sve n i i.

Neka je $A = \{\xi_{n,i} : n, i \in \omega\}$ i neka je $a \in u^2(A) = u(A)$. Tada postoji fiksirani niz $N = (y_n \underset{n}{\to} a) \in \mathcal{K}_T$ u A. N ne može imati konstantan podniz jer je $\mathcal{K}_T$ prava. Zato, po korolaru 1.3., proučavajmo samo njegovu sliku S. S ne može imati niti beskonačno članova u istome $X_i := \{\xi_{ni} : i\}$ jer bi onda N imao podniz koji bi u $\mathcal{K}_T$ konvergirao prema x_n i prema $a \neq x_n$ (možemo formalno razlikovati $\xi_{n,i}$ i $\xi_{n',i'}$ za $(n, i) \neq (n', i')$, iako su možda isti). Možemo pretpostaviti da S ima po jedan član u svakome x_i, jer u protivnom uzmemo podniz izbacivši sve ostale.

Neka je $\mathcal{S}$ skup svih takvih S-ova. Lako se provjere uvjeti Zornove leme na $(\mathcal{S}, \subseteq)$, pa po njoj $\mathcal{S}$ ima maksimalni element F. Neka je $t = \{n \in \omega : S \cap X_n \neq \emptyset\}$. Kada bi bilo $t \neq \omega$, mogli bismo na onim n-ovima koji su u $\omega\backslash t$ na isti način naći niz i prema propoziciji 1.1. dodati ga F-u, pa F ne bi bio maksimalan (za $\omega\backslash t$ konačan problem je još jednostavniji). Zato je $t = \omega$, iz čega se lako vidi da postoji tražena funkcija. **Q.E.D.**

Uvjet $x_n \neq a$ u gornjem se teoremu ne može izostaviti, što pokazuje sljedeći primjer:

Primjer V

Neka je formalno

$$A = \{x_{n,i} : i, n \in \omega\},$$

$$B = \{y\},$$

$$X = A \cup B.$$

Definirajmo nizovnu familiju na X

$$\mathcal{A} = \{(x_{ni} \xrightarrow[i]{} y) : n \in \omega\}.$$

Funkcija limitiranja očito može dodati samo b, pa je $T_{\mathcal{A}}$ Fréchetov.

Pridružena baza konvergencije $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ se sastoji od svih konstantnih fiksiranih nizova i od podnizova elemenata od $\mathcal{A}$. Ako želimo da niz $(y_n)_n$ u A konvergira ka c on mora imati podniz među podnizovima od $\mathcal{A}$, a kako su svi podnizovi od $\mathcal{A}$ cijeli u $\{x_{n,i} \colon i \in \omega\}$ za neki n, onda i $(y_n)_n$ mora imati beskonačno elemenata u nekom $\{x_{n,i} \colon i \in \omega\}$ za neki n. Međutim, niz $(x_{n,f(n)})$ koji bi trebao konvergirati u c po teoremu ima po jedan član u svakom $\{x_{n,i} \colon i \in \omega\}$. Dakle, takav niz ne može postojati, iako je prostor Fréchetov.

1.5. Potprostori

Za kraj poglavlja recimo nešto kratko o potprostorima.

Definicija 1.I

Neka je $\mathcal{B}$ baza konvergencije na skupu X i neka je $Y \subseteq X$. *Restrikcija* baze konvergencije $\mathcal{B}$ na Y je:

$$\mathcal{B} \restriction Y = \{N \in \mathcal{B} \colon N \text{ je na } Y\}.$$

Očito je restrikcija baze konvergencije opet baza konvergencije.

Propozicija 1.21.

Neka je $\mathcal{B}$ baza konvergencije na skupu X i neka je $Y \subseteq X$.

1. *Ako je Y zatvoren u $T_{\mathcal{B}}$ onda je $T_{\mathcal{B}\restriction Y}$ potprostor od $T_{\mathcal{B}}$.*
2. *Ako je $T_{\mathcal{B}}$ Fréchetov onda je $T_{\mathcal{B}\restriction Y}$ potprostor od $T_{\mathcal{B}}$.*

Dokaz:

Neka je A zatvoren u $T_{\mathcal{B}}$, tj. $u_{\mathcal{B}}(A) = A$. Jasno je onda $u_{\mathcal{B}\restriction Y}(A \cap Y) = A \cap Y$, dakle $A \cap Y$ je zatvoren u $T_{\mathcal{B}\restriction Y}$.

Neka je A zatvoren u $T_{\mathcal{B}\restriction Y}$, tj. $u_{\mathcal{B}\restriction Y}(A) = A$. Sada nam trebaju uvjeti iz propozicije:

1. Neka je Y zatvoren u $T_{\mathcal{B}}$, tj. $u_{\mathcal{B}}(Y) = Y$ radi čega je jasno $u_{\mathcal{B}}(A) \subseteq Y$. Zato funkcija limitiranja ovdje uopće ne koristi one fiksirane nizove iz $\mathcal{B}$ koji nisu na Y, pa je $u_{\mathcal{B}}(A) = u_{\mathcal{B}\restriction Y}(A) = A$, dakle A je zatvoren i u $T_{\mathcal{B}}$.

2. Ako je $T_{\mathcal{B}}$ Fréchetov, $u_{\mathcal{B}}(A)$ je zatvoren u $T_{\mathcal{B}}$. Pretpostavimo da je $a \in u_{\mathcal{B}}(A) \cap Y$. Tada postoji neki fiksirani niz $N \in \mathcal{B}$ u A koji konvergira prema a. No N je onda i element od $\mathcal{B} \restriction Y$, pa je $a \in u_{\mathcal{B}\restriction Y}(A) = A$. Dakle, $u_{\mathcal{B}}(A) \cap Y = A$. ■

Korolar 1.22.

1. *Zatvoreni potprostor nizovnog prostora je nizovan.*
2. *Potrostor Fréchetovog prostora je Fréchetov.*

Dokaz:

Neka je $\mathcal{B}$ bilo koja baza konvergencije koja inducira topološki prostor $T = (X, \tau)$ (recimo $\mathcal{K}_T$), i neka je $T' = (Y, \tau')$ neki njegov potprostor. U oba slučaja je $T_{\mathcal{B}\restriction Y}$ potprostor od T, a kako je definiran na Y mora biti jednak T'. ■

Da se gornje tvrdnje ne mogu poopćiti pokazuje sljedeći primjer.

Primjer VI

Neka je $T_{\mathcal{A}}$ prostor iz primjera IV. Restrikcija baze konvergencije $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ na $A \cup C$ se sastoji samo od konstantnih nizova, pa je prostor $T_{\mathcal{B}_{\mathcal{A}}\restriction(A\cup C)}$ diskretan. No $A \cup C$ kao potprostor od $T_{\mathcal{A}}$ nije diskretan jer je zatvarač od A cijeli prostor.

Ovo je i kontraprimjer poopćenju korolara, dakle primjer potprostora nizovnog prostora koji nije nizovan, jer u $A \cup C$ nema konvergentnih nizova koji nemaju konstantan podniz, a opet A nije zatvoren.

Poglavlje 2.

Booleove algebre

2.1. Definicija

Definicija 2.A
Polje skupova na skupu S je podskup partitivnog skupa $U \subseteq \mathcal{P}(x)$ koji sadrži $\emptyset$ i S i koji je zatvoren na unije, komplemente i presjeke, tj.:

(P1) Za $a, b \in U$ je i $a \cup b \in U$

(P2) Za $a, b \in U$ je i $a \cap b \in U$

(P3) Za $a \in U$ je i $S \backslash a \in U$

Booleova algebra je struktura koja ugrubo zadovoljava svojstva koja ima polje skupova, preciznije:

Definicija 2.B
Booleova algebra je uređena četvorka $(X, \vee, \wedge, -)$ skupa X, binarnih operacija na njemu $\vee$ (*spoj*) i $\wedge$ (*klin*) te unarne operacije $-$ (*komplement*) za koji postoje $0, 1 \in X$ takvi da za svake $a, b, c \in X$ vrijedi

(B1) $a \vee b = b \vee a, \quad a \wedge b = b \wedge a;$ (komutativnost)

(B2) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, \quad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c;$ (asocijativnost)

(B3) $(a \wedge b) \vee b = b, \quad (a \vee b) \wedge b = b;$ (apsorpcija)

(B4) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c);$ (distributivnost)

(B5) $a \wedge -a = 0, \quad a \vee -a = 1.$

U ovom radu B će uvijek označavati Booleovu algebru. Radi jednostavnosti ćemo, iako neprecizno, pod imenom Booleove algebre B smatrati i skup X.

Ako su $C, D \subseteq B$ i $a \in B$ sa $C \vee D$, $C \wedge D$, $C - D$, $C \vartriangle D$, $C \vee a$, itd. ću označavati skupove definirane na očiti način.

Očito je svako polje skupova Booleova algebra, gdje ulogu $\vee$ preuzima $\cup$, ulogu $\wedge$ preuzima $\cap$ i ulogu $-$ preuzima komplement. Obratno, nije odmah jasno da li je svaka Booleova algebra izomorfna nekom polju skupova, ali to ćemo dokazati kasnije.

Primjer VII (*Partitivni skup*)

Za proizvoljan skup S, $\mathcal{P}(S)$ je polje skupova, pa i Booleova agebra.

Poseban slučaj ove algebre je kada je S jednočlan. Tada se Booleova algebra sastoji samo od dva elementa, 0 i 1, koji se mogu interpretirati kao laž i istina, i operacije na njima se mogu interpretirati kao logičke operacije 'i', 'ili' i 'ne'. Ova Booleova algebra se zove *dvoelementna Booleova algebra*.

Primjer VIII (*Konačno-kofinitna algebra*)

Neka je B skup svih konačnih i kofinitnih (onih kojima je komplement konačan) podskupova od proizvoljnog beskonačnog skupa S. Tada je B polje skupova, pa i Booleova algebra.

Primjer IX (*Algebra regularno otvorenih skupova*)

Neka je $T = (X, \tau)$ topološki prostor. Radi lakšeg zapisivanja, označimo sa ic funkciju $\operatorname{int} \circ \operatorname{cl}$. Otvoreni skup O ćemo zvati *regularno otvoren* ako je $ic(O) = O$.

Primijetimo prvo da u svakom topološkom prostoru za sve skupove a, b i c vrijedi

$$\operatorname{int}(a \cap b) = \operatorname{int}(a) \cap \operatorname{int}(b),$$

$$\operatorname{cl}(a \cup b) = \operatorname{cl} a \cup \operatorname{cl} b.$$

Nadalje, za otvoreni a vrijedi

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl} a) \supseteq a$$

i za zatvoreni a vrijedi

$$\operatorname{cl}(\operatorname{int}(a)) \subseteq a.$$

Koristeći obje ove tvrdnje zaključujemo da za otvoreni a vrijedi

$$\operatorname{cl}(\operatorname{int}(\operatorname{cl} a)) = \operatorname{cl} a$$

i za zatvoreni a vrijedi

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(\operatorname{int}(a))) = \operatorname{int}(a).$$

Trebati će nam i sljedeća lema.

Lema 2.1.
Za sve otvorene skupove a i b vrijedi

$$ic(a \cap b) = ic(a) \cap ic(b).$$

Dokaz:

$$ic(a \cap b) \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{cl}(a) \cap \operatorname{cl}(b)) = ic(a) \cap ic(b).$$

U obratu je dovoljno dokazati da je $ic(a) \cap ic(b)$ podskup od $\operatorname{cl}(a \cap b)$, jer je otvoren. Pa pretpostavimo suprotno, da je

$$(ic(a) \cap ic(b)) \backslash \operatorname{cl}(a \cap b) = ic(a) \cap ic(b) \cap \operatorname{int}(X \backslash a \cup X \backslash b) \neq \emptyset.$$

Tada je i

$$\operatorname{cl}(a) \cap ic(b) \cap \operatorname{int}(X \backslash a \cup X \backslash b) \neq \emptyset,$$

pa kako je $ic(b) \cap \operatorname{int}(X \backslash a \cup X \backslash b)$ otvoren skup vrijedi i

$$a \cap ic(b) \cap \operatorname{int}(X \backslash a \cup X \backslash b) \neq \emptyset.$$

Analogno dobijemo

$$a \cap b \cap \operatorname{int}(X \backslash a \cup X \backslash b) \neq \emptyset,$$

što se jednostavnim računom vidi da nije. Dakle, tvrdnja zaista vrijedi. ■

Definirajmo operacije na skupu R svih regularno otvorenih skupova. Neka su $a, b \in R$.

1. $a \vee b = ic(a \cup b) = \operatorname{int}(\operatorname{cl} a \cup \operatorname{cl} b)$
2. $a \wedge b = a \cap b$
3. $-a = \operatorname{int}(X \backslash a)$

Provjerimo da su rezultati gornjih operacije opet regularno otvoreni:

1. $ic(a \vee b) = ic(ic(a \cup b)) = ic(a \cup b) = a \vee b$
2. $ic(a \wedge b) = ic(a \cap b) = ic(a) \cap ic(b) = ic(a) \wedge ic(b)$
3. $ic(-a) = ic(\operatorname{int}(X \backslash a)) = \operatorname{int}(X \backslash a) = -a$

Pokažimo da operacije zadovoljavaju aksiome Booleovih algebri:

(B1) Jasno.

(B2) $a \vee (b \vee c) = \operatorname{int}(\operatorname{cl} a \cup ic(\operatorname{cl}(b \cup c))) = \operatorname{int}(\operatorname{cl} a \cup \operatorname{cl}(b \cup c)) = ic(a \cup b \cup c)$

$a \wedge (b \wedge c) = a \cap (b \cap c) = a \cap b \cap c$

(B3) $(a \wedge b) \vee b = ic((a \cap b) \cup b) = ic(b) = b$

$(a \vee b) \wedge b = \text{int}\,(\text{cl}\, a \cup \text{cl}\, b) \cap \text{int}\,(\text{cl}\, b) = \text{int}\,((\text{cl}\, a \cup \text{cl}\, b) \cap \text{cl}\, b) = \text{int}\,(\text{cl}\, b) = b$

(B4) $a \wedge (b \vee c) = ic(a) \cap ic(b \cup c) = ic(a \cap (b \cup c)) = ic((a \cap b) \cup (a \cap c)) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

$a \vee (b \wedge c) = ic(a \cup (b \cap c)) = ic((a \cup b) \cap (a \cup c)) = ic(a \cup b) \cap ic(a \cup c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

(B5) $a \wedge -a = a \cap (X \backslash a) = 0$

$a \vee -a = ic(a \cup (X \backslash a)) = ic(X) = X$

Dakle $B = (R, \vee, \wedge, -)$ je Booleova algebra. Primijetimo da se ove operacije ne poklapaju sa skupovnim unijama i presjecima, pa ova Booleova algebra nije polje skupova (što ne znači da nije izomorfna nekom polju skupova).

2.2. Jednostavne posljedice aksioma

Primijetimo da ako u aksiomima svaki $\vee$ zamijenimo sa $\wedge$ i obrnuto, te 1 sa 0 i obrnuto, dobijemo iste aksiome. Radi toga će sve u Booleovim algebrama biti simetrično na tu zamjenu. Izraze koji nastaju tom zamjenom zovemo *dualni*. Zbog toga neke tvrdnje nećemo morati dokazivati ako smo dokazali dualne, nego ćemo se jednostavno pozvati na *princip dualnosti*.

Propozicija 2.2.
Za svaki $a \in B$ je:

1. $a \vee a = a, \quad a \wedge a = a;$
2. $a \vee 1 = 1, \quad a \wedge 0 = 0;$
3. $a \wedge 1 = a, \quad a \vee 0 = a;$
4. $a \vee b = 1, \quad a \wedge b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -a;$
5. $--a = a;$
6. $a = b \quad \Leftrightarrow \quad -a = -b;$
7. $-(a \vee b) = -a \wedge -b, \quad -(a \wedge b) = -a \vee -b;$ *(de Morganovi zakoni)*
9. $1 = -0.$

Dokaz:

1. $a = a \vee (a \wedge b) = (a \vee a) \wedge (a \wedge b) = (a \wedge (a \vee b)) \wedge (a \vee (a \wedge b)) = a \vee a$
2. $a \vee 1 = a \vee a \vee -a = a \vee -a = 1$
3. $a \vee 0 = a \vee (a \wedge -a) = a$
4. $b = 1 \vee b = (a \wedge -a) \vee b = (a \vee b) \wedge (-a \vee b) = 1 \wedge (-a \vee b) = -a \vee b$

   $-a = 1 \vee -a = (a \wedge b) \vee -a = (a \vee -a) \wedge (b \vee -a) = 1 \wedge (b \vee -a) = b \vee -a$

5. Direktno iz 4.
6. Direktno iz 5.
7. $(a \vee b) \wedge (-a \wedge -b) = (a \wedge -a \wedge -b) \vee (b \wedge -a \wedge -b) = 0 \vee 0 = 0$ $(a \vee b) \vee (-a \wedge -b) = (a \vee b \vee -a) \wedge (a \vee b \vee -b) = 1 \wedge 1 = 1$ Sada je po 4. $-(a \vee b) = -a \wedge -b$
9. Jasno.

Ostale formule su dualne. ■

Propozicija 2.3.
Za sve $a, b \in B$ je $a = a \wedge b$ ako i samo ako je $a \vee b = b$.

Dokaz:
Neka je $a = a \wedge b$. Tada je $a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b$.
Obrat je analogan. ■

Definicija 2.C
Definirajmo relaciju $\leq$ na B: za $a, b \in B$ je $a \leq b$ ako a i b zadovoljavaju jednu od gornjih tvrdnji. Pišemo i $b \geq a$. Kažemo da je a *podelement* od b, i da je b *nadelement* od a. Ako je još $a \neq b$, onda je a *pravi* podelement od b, i b je *pravi* nadelement od a, u oznaci $a < b$ ili $b > a$.

Kod prijelaza na dualne formule trebamo svaki $\leq$ zamijeniti sa $\geq$ i obrnuto.

Propozicija 2.4.
Relacija $\leq$ je relacija parcijalnog uređaja na B.

Dokaz:
Refleksivnost: Po propoziciji 2.1. je $a = a \wedge a$.
Tranzitivnost: Neka je $a = a \wedge b$ i $b = b \wedge c$. Tada je

$$a = a \wedge b = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c.$$

Antisimetričnost: Neka je $a = a \wedge b$ i $b = a \wedge b$. Jasno je tada $a = b$. ■

Propozicija 2.5.
Za sve $a, b, c, d \in B$ vrijedi

1. $0 \leq a \leq 1$;
2. $a \leq a \vee b, \quad a \geq a \wedge b$;

3. $a \leq c, b \leq d \quad \Rightarrow \quad a \vee b \leq c \vee d \quad i \quad a \wedge b \leq c \wedge d$;
4. $a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad -a \geq -b$.

Dokaz:
Dokazat ću samo jednu formulu gdje je druga dualna.

1. Direktna posljedica propozicije 2.2.
2. Direktna posljedica (B3).
3. $(a \vee b) \vee (c \vee d) = (a \vee c) \vee (b \vee d) = c \vee d$
4. Neka je $a \leq b$, tj. $a = a \wedge b$. Tada je po de Morganovim zakonima $-a = -a \vee -b$, tj. $-a \geq -b$. Obrat je isti. ■

Zbog komutativnosti i distributivnosti možemo definirati spoj i klin konačno mnogo skupova:

$$\bigvee \{a_i : i = 1, \ldots n\} = \bigvee_{i=1}^{n} a_i = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n,$$

$$\bigwedge \{a_i : i = 1, \ldots n\} = \bigwedge_{i=1}^{n} a_i = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n.$$

Propozicija 2.6.
Spoj i klin možemo ekvivalentno definirati: za sve $a, b \in B$

$$a \vee b = \sup\{a, b\}$$

$$a \wedge b = \inf\{a, b\}$$

Slično vrijedi i za konačne spojeve i klinove: za svaki konačni $A \subseteq B$ je

$$\bigvee A = \sup A$$

$$\bigwedge A = \inf A$$

Dokaz:
Iz prethodne propozicije, točka 2., je $a \leq a \vee b$ i $a \leq a \vee b$, dakle $a \vee b$ je gornja međa od $\{a, b\}$.
Neka je $c \geq a, b$ tj. $c = a \vee c = b \vee c$. Tada je $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) = a \vee c = c$, tj. $c \geq a \vee b$, dakle $a \vee b$ je zaista supremum od $\{a, b\}$.
Druga formula je dualna.
Drugi dio propozicije se lako dokaže indukcijom. ■

Definicija 2.D

Za $a, b \in B$ njihova *razlika* je

$$a - b := a \wedge -b,$$

a *simetrična razlika* je

$$a \vartriangle b := (a - b) \vee (b - a).$$

Kažemo da su $a, b \in B$ *disjunktni* ako je $a \wedge b = 0$. Ako $a, b \in B$ nisu disjunktni kažemo da se *susreću*.

Propozicija 2.7.

Za sve $a, b, c \in B$ vrijedi

1. $(a \vee b) - c = (a - c) \vee (b - c), \quad (a \wedge b) - c = (a - c) \wedge (b - c);$
2. $a - (b \vee c) = (a - b) \wedge (a - c), \quad a - (b \wedge c) = (a - b) \vee (a - c);$
3. $(a - b) - c = (a - c) - b = a - (b \vee c);$
4. $a \vartriangle b = b \vartriangle a;$
5. $a - a = a \vartriangle a = 0;$
6. $a \vartriangle b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b;$
7. $a \vartriangle 0 = a, \quad a \vartriangle 1 = -a;$
8. $a \vartriangle b = (a \vee b) - (a \wedge b) = (a \vee b) \wedge (-a \vee -b);$
9. $-(a \vartriangle b) = -a \vartriangle b, \quad a \vartriangle b = -a \vartriangle -b;$
10. $(a \vartriangle b) \vartriangle c = a \vartriangle (b \vartriangle c).$

Dokaz:

Dokazati ću samo jednu formulu gdje je druga analogna.

1. $(a \vee b) - c = (a \vee b) \wedge -c = (a \wedge -c) \vee (b \wedge -c) = (a - c) \vee (b - c)$
2. $a - (b \vee c) = a \wedge -(b \vee c) = a \wedge (-b \wedge -c) = (a \wedge -b) \wedge (a \wedge -c) = (a - b) \wedge (a - c)$
3. $(a - b) - c = (a \wedge -b) \wedge -c = a \wedge (-b \wedge -c) = a \wedge -(b \vee c) = a - (b \vee c)$
4. Jasno.
5. Jasno.
6. $a = a \vartriangle 0 = a \vartriangle a \vartriangle b = 0 \vartriangle b = b$

   Drugi smjer je točka 5.
7. $a \vartriangle 0 = (a - 0) \vee (0 - a) = a \vee 0 = a$

   $a \vartriangle a = (a - 1) \vee (1 - a) = 0 \vee -a = -a$
8. $a \vartriangle b = (a - b) \vee (b - a) = (a \wedge -b) \vee (b \wedge -a) = ((a \wedge -b) \vee b) \wedge ((a \wedge -b) \vee -a) = (a \vee b) \wedge (-b \vee b) \wedge (a \vee -a) \wedge (-b \vee -a) = (a \vee b) \wedge 1 \wedge 1 \wedge -(b \wedge a) = (a \vee b) - (a \wedge b)$

9. $-(a \vartriangle b) = -[(a \vee b) \wedge (-a \vee -b)] = (-a \wedge -b) \vee (a \wedge b) = (-a - b) \vee (b - (-a)) = -a \vartriangle b$

10. $(a \vartriangle b) \vartriangle c = [(a \vartriangle b) \vee c] \wedge [(-a \vartriangle b) \vee -c] = (a \vee b \vee c) \wedge (-a \vee -b \vee c) \wedge (-a \vee b \vee -c) \wedge (a \vee -b \vee -c)$

    Dobili smo simetričan zapis. ■

Primijetimo da iz prethodne propozicije slijedi da je $(B, \vartriangle)$ Abelova grupa sa neutralnim elementom 0 u kojoj je svaki element sam sebi inverz.

2.3. Podalgebre, homomorfizmi i restrikcije

Definicija 2.E
Neka je $B = (X, \vee, \wedge, -)$ Booleova algebra. Neprazan $Y \subseteq X$ je *podalgebra* ako je zatvoren na operacije $\vee$, $\wedge$ i $-$.

Jasno je $(Y, \vee', \wedge', -')$ i sama Booleova algebra, gdje su $\vee'$, $\wedge'$ i $-'$ odgovarajuće restrikcije operacija.

Lako se vidi da su 0 i 1 elementi svake podalgebre.

Primjer X
Konačno kofinitna algebra na X je podalgebra od $\mathcal{P}(X)$.
Jasno je $\{0, 1\}$ podalgebra svake Booleove algebre.

Definicija 2.F
Neka su $B = (X, \vee, \wedge, -)$ i $B' = (X, \vee', \wedge', -')$ Booleove algebre. Funkcija $h\colon X \to Y$ je *homomorfizam* ako čuva operacije, točnije:

(a) $h(a \vee b) = h(a) \vee' h(b)$,

(a′) $h(a \wedge b) = h(a) \wedge' h(b)$,

(b) $h(-a) = -'h(a)$.

Homomorfizam koji je i injekcija zove se *monomorfizam*.
Homomorfizam koji je i surjekcija zove se *epimorfizam*.
Homomorfizam koji je i bijekcija zove se *izomorfizam*.
Ako između dvije Booleove algebre postoji izomorfizam, kažemo da su one *izomorfne*.

Zbog de Morganovih zakona je dovoljno provjeriti jedan od uvjeta (a), (a′), jer onda vrijedi i drugi.

Operacije na svim algebrama ću obično označavati isto $\vee$, $\wedge$ i $-$, jer je uvijek jasno o kojoj se algebri radi.

Primjer XI

Neka je B konačno-kofinitna algebra, a B' dvoelementna Booleova algebra. Tada je funkcija

$$f(a) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } a \text{ konačan} \\ 1 & \text{ako je } a \text{ kofinitan} \end{cases}$$

epimorfizam.

Propozicija 2.8.

Neka su B i B' Booleove algebre, te neka je $h\colon B \to B'$ homomorfizam. Tada je slika $h(B)$ podalgebra od B'.

Dokaz:

Neka su $a', b' \in h(B)$, tj. postoje $a, b \in B$ takvi da je $a' = h(a)$, $b' = h(b)$. Tada je

$$a' \vee b' = h(a) \vee h(b) = h(a \vee b) \in h(B),$$

$$-a' = -h(a) = h(-a) \in h(B).$$

Dakle, $h(B)$ je zatvoren na operacije. ■

Propozicija 2.9.

Neka su B i B' Booleove algebre, te neka je $h\colon B \to B'$ homomorfizam. Homomorfizam h čuva uređaj, tj. za $a \le b$ je $h(a) \le' h(b)$.

Dokaz:

$h(a) = h(a \wedge b) = b(a) \wedge h(b)$. ■

Definicija 2.G

Neka je $B = (X, \vee, \wedge, -)$ Booleova algebra i $x \in X$. Na $X' := \{a \in X\colon a \le x\}$ definirajmo operacije

$$a \vee' b = a \vee b,$$

$$a \wedge' b = a \wedge b,$$

$$-'a := x - a.$$

Uređenu četvorku $B' := (X', \vee', \wedge', -')$ zovemo *restrikcija* od B na x, i označavamo $B \restriction x$.

Propozicija 2.10.
Uređena četvorka $B \restriction x$ je Booleova algebra gdje x preuzima ulogu jedinice.

Dokaz:
Aksiomi (B1)–(B4) vrijede očito. Dokažimo (B5):

$$a \wedge -'a = a \wedge (x - a) = a \wedge (x \wedge -a) = 0 \wedge x = 0,$$

$$a \vee -'a = a \vee (x - a) = a \vee (x \wedge -a) = (a \vee x) \wedge (a \vee -a) = x \wedge 1 = x.$$

∎

Kao i kod općenitih Booleovih algebri, sa $B \restriction x$ ćemo označavati i skup $X' = \{a \in X : a \leq x\}$.

Propozicija 2.11.
Neka je $x \in B$. Funkcija $h : B \to B \restriction x$ definirana sa

$$h(a) = a \wedge x$$

je epimorfizam, tzv. kanonski.

Dokaz:
Funkcija h je jasno surjekcija. Neka su $a, b \in B$

$$h(a \vee b) = (a \vee b) \wedge x = (a \wedge x) \vee (b \wedge x) = h(a) \vee h(b),$$

$$-'h(a) = x - h(a) = x - (a \wedge x) = (x - a) \vee (x - x) = x - a = x \wedge -a = h(-a).$$

∎

2.4. Ideali, filteri i kvocijenti

Definicija 2.H
Skup $D \subseteq B$ je *zatvoren prema dolje* ako $a \leq d \in D$ implicira $a \in D$.
Analogno, $D \subseteq B$ je *zatvoren prema gore* ako $a \geq d \in D$ implicira $a \in D$.
Neprazan $I \subseteq B$ zatvoren prema dolje je *ideal* ako za sve $a, b \in I$ je i $a \vee b \in I$. Ideal koji je različit od B se zove *pravi* ideal.

Dualan pojam idealu je filter: Neprazan $F \subseteq B$ zatvoren prema gore je *filter* ako za sve $a, b \in F$ je i $a \wedge b \in F$. Filter različit od B je *pravi* filter.

Lako se vidi da za D i E zatvorene prema dolje vrijedi $D \vartriangle E = D \vee E$. Analogno, za G i H zatvorene prema gore vrijedi $D \vartriangle H = D \wedge H$.

Primjer XII

Svi podelementi zadanog $b \in B$ čine tzv. *glavni* ideal, u oznaci I_b. Primijetimo da je $I_b = B \upharpoonright b$.

Analogno, svi nadelementi od b čine *glavni* filter, u oznaci F_b.

Primjer XIII

Svi konačni skupovi u polju skupova čine ideal. Analogno, kofinitni čine filter.

Jasno je 0 element svakog ideala, i 1 je element svakog filtera.

Propozicija 2.12.

Ideal I je pravi ako i samo ako $1 \notin I$.

Filter F je pravi ako i samo ako $0 \notin F$.

Dokaz:

Dokažimo obrate po kontrapoziciji:

Ako I nije pravi, onda je $I = B$, pa je i $1 \in I$.

Ako je $1 \in I$, onda je zbog zatvorenosti prema dolje svaki $a \in I$, tj. $I = B$.

Tvrdnja za filter je dualna. ■

Direktno iz definicije se vidi da je presjek proizvoljno mnogo ideala ideal. Dualno, presjek proizvoljno mnogo filtera je filter. Radi toga možemo proizvoljnim skupom $S \subseteq B$ generirati ideal I_S kao presjek svih ideala koji sadrže S, tj. najmanji ideal koji sadrži S. Jasno je $I_{\{b\}}$ upravo glavni ideal I_b. Dualno definirano filter F_S.

Ideal I_S smo mogli definirati i na drugačiji način:

Propozicija 2.13.

Neka je $S \subseteq B$. Vrijedi:

$$I_S = \left\{a \in B\colon \text{ postoji konačan } K \subseteq S \text{ takav da je } a \leq \bigvee K\right\},$$

$$F_S = \left\{ a \in B \colon \ \textit{postoji konačan } K \subseteq F \textit{ takav da je } a \geq \bigwedge K \right\}.$$

Dokaz:

Nazovimo desnu stranu prve jednakosti sa I. Jasno je $S \subseteq I$ i I je ideal. Neka je J neki drugi ideal koji sadrži S i neka je K konačan podskup od S. Jasno je $\bigvee K \in J$, pa je onda i svaki $a \leq \bigvee K$ u J. Zato je $I_S \subseteq J$.

Druga tvrdnja je dualna. ∎

Propozicija 2.14.

Neka su B i B' Booleove algebre te neka je $h \colon B \to B'$ homomorfizam. Tada je praslika $h^{-1}(0)$ ideal u B i praslika $h^{-1}(1)$ filter u B.

Dokaz:

Neka su $a, b \in h^{-1}(0)$, tj. $h(a) = h(b) = 0$ i neka je $c \leq b$. Jer homomorfizam čuva uređaj vrijedi $h(c) \leq h(b) = 0$, dakle $h(c) = 0$. Vrijedi i $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b) = 0 \vee 0 = 0$, dakle $h^{-1}(0)$ je ideal.

Druga tvrdnja je dualna. ∎

Neka je I ideal. Definirajmo relaciju $\sim$: za $a, b \in B$ je $a \sim b$ ako je $a \vartriangle b \in I$.

Propozicija 2.15.

Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije.

Dokaz:

Refleksivnost: $a \vartriangle a = 0 \in I$

Tranzitivnost: Neka je $a \vartriangle b \in I$ i $b \vartriangle c \in I$. Tada je

$$a \vartriangle c = a \vartriangle c \vartriangle 0 = a \vartriangle c \vartriangle (b \vartriangle b) = (a \vartriangle b) \vartriangle (a \vartriangle c) \leq (a \vartriangle b) \vee (a \vartriangle c) \in I$$

Simetričnost je jasna. ∎

Radi gornje propozicije na B možemo proučavati klase ekvivalencije $[a]$. Na skupu X svih klasa ekvivalencije definirajmo operacije:

$$[a] \vee [b] = [a \vee b],$$
$$[a] \wedge [b] = [a \wedge b],$$
$$-[a] = [-a].$$

Propozicija 2.16.
Gornje relacije su dobro definirane, tj. ne ovise o izboru predstavnika klase.
Skup X sa gore navedenim operacijama čini Booleovu algebru.

Dokaz:
Neka je $a' \sim a$.
Po točki 9. propozicije 2.7. je $-a' \sim -a$ i $-b' \sim -b$. Radi toga je $-$ dobro definiran.

$$(a' \vee b) \vartriangle (a \vee b) = ((a' \vee b) - (a \vee b)) \vee ((a \vee b) - (a' \vee b)) =$$

$$= (((a' \vee b) - b) - a) \vee (((a \vee b) - b) - a') = ((a' - b) - a) \vee ((a - b) - a') \leq (a' - a) \vee (a - a') = a \vartriangle a' \in I.$$

Analogno zamijenimo b sa $b' \sim b$, dakle $\vee$ je dobro definiran. Nadalje:

$$(a' \wedge b') \vartriangle (a \wedge b) = (-a' \vee -b') \vartriangle (-a \vee -b) \in I.$$

Dakle, i $\wedge$ je dobro definiran.
Neposredno iz definicije se vidi da navedene operacije zadovoljavaju sve aksiome Booleovih algebri. ∎

Definicija 2.I
Neka je I ideal u B. Booleovu algebra na skupu klasa ekvivalencije $\sim$ sa gore navedenim operacijama zovemo *kvocijentna* algebra i označavamo je B/I.

Funkcija $h\colon B \to B/I$ definirana sa $h(a) := [a]$ je očito epimorfizam i zovemo ga *kanonski*.

Propozicija 2.17.
Neka je $x \in B$. Restrikcija $B \restriction x$ je izomorfna kvocijentu po glavnom idealu B/I_{-x}.

Dokaz:
Definirajmo funkciju $h\colon B \restriction x \to B/I_{-x}$ sa $h(a) = [a]$. Dokažimo da je h izomorfizam.
Jasno vrijedi (a) iz definicije homomorfizma.
Dokažimo (b): neka je $a \leq x$. Vrijedi $h(x - a) = [x - a]$, a $-h(a) = -[a] = [-a]$. Zaista

$$(x - a) \vartriangle -a = ((x - a) - -a) \vee (-a - (x - a)) = (x - (a \vee -a)) \vee (-a \wedge -(x \wedge -a)) =$$

$$= -a \wedge (-x \vee a) = -a \wedge -x = -(a \vee x) = -x \in I_{-x}.$$

Neka su $a, b \leq x$ takvi da je $h(a) = h(b)$. Tada je $a \vartriangle b \in I_{-x}$, tj. $a \vartriangle b = (a \vee b) - (a \wedge b) \leq -x$. Ali $a \vee b \leq x$, pa je i $a \vartriangle b \leq x$, dakle $a \vartriangle b \leq x \wedge -x = 0$, tj. $a = b$. Dakle, h je injekcija.
Neka je $[a] \in B/I_{-x}$. Neka je $a' = a \wedge x \leq x$. Lako se vidi da je $a' \sim a$ tj. $[a] = h(a')$. Dakle, h je surjekcija. ∎

Gornja propozicija nam daje mnoge primjere kvocijentnih algebri. Prije još jednog primjera uvedimo novi pojam:

Definicija 2.J
Ne-nul $a \in B$ je *atom* ako mu je jedini pravi podelement 0.
Booleova algebra B je *atomska* ako svaki ne-nul $b \in B$ ima podelement koji je atom.
Booleova algebra B je *bezatomna* ako nema atoma.

Primjer XIV
Partitivni skup je atomska Booleova algebra u kojoj su atomi jednočlani skupovi.

Primjer XV (*Cohenova algebra*)
Neka je X beskonačan skup. Skup I svih konačnih podskupova je ideal. Algebru $C := \mathcal{P}(X)/I$ zovemo *Cohenova algebra* na X.
Pokažimo da je C bezatomna. Neka je $[a] \in C$, $[a] \neq 0$, tj. $a \in \mathcal{P}(X)$ je beskonačan. Podijelimo a na dva beskonačna c i d. Jasno je $[0] < [c] < [a]$, dakle a nije atom.

Propozicija 2.18.
Bezatomna Booleova algebra B je gusta, tj. za svake $a, b \in B$, $a < b$, postoji $c \in B$ takav da je $a < c < b$.

Dokaz:
Budući da je B bezatomna, postoji $d \in B$ takav da je $0 < d < b - a$. Element $a \vee d$ zadovoljava traženo. ∎

2.5. Maksimalni ideali i filteri, Stoneov teorem reprezentacije

Definicija 2.K
Pravi ideal I u Booleovoj algebri B je *maksimalan* ili *prost* ako je maksimalan među pravim idealnima, tj. ako je ideal $J \supseteq I$, onda je $J = I$ ili $J = B$.
Dualno, pravi filter F u Booleovoj algebri B je *maksimalan* ili *prost* ako je maksimalan među pravim filterima, tj. ako je filter $G \supseteq F$, onda je $G = F$ ili $G = B$. Maksimalni filter još se zove i *ultrafilter*.

Primjer XVI

Neka je X skup i $x \in X$. Ideal $I_{\{x\}}$ i filter $F_{X\setminus\{x\}} = \mathcal{P}(X)\setminus I_{\{x\}}$ su maksimalni u $\mathcal{P}(X)$.

Gornji primjer nas motivira na sljedeću općenitu propoziciju:

Propozicija 2.19.

Neka je $d \in B$. Glavni filter F_d je maksimalan ako i samo ako je d atom.

Dokaz:

Dokažimo obrate po kontrapoziciji.

Ako F_d nije maksimalan, onda postoji pravi filter $G \supset F_d$, pa neka je $a \in G\setminus F_d$. Tada je i $b := a \wedge x \in G$. Filter G je pravi, pa je $a \neq 0$, a vrijedi i $a \neq d$ jer bi u protivnom bilo $a \in F_d$. Jasno $b \leq d$, dakle d nije atom.

Ako d nije atom, neka je $e < d$, $e \neq 0$. Filter F_e je strogi nadskup od F_d koji je i dalje pravi. Dakle F_d nije maksimalan. ■

Vrijedi i dualna tvrdnja gornjoj propoziciji sa idealnima, ali onda moramo koristiti dualan pojam pojmu atoma koji nam ovdje nije potreban, pa ga nećemo definirati (možemo ga jednostavno zvati onaj kome je komplement atom).

Primjer XVII

Svi konačni elementi konačno-kofinitne algebre čine maksimalan ideal koji nije glavni. Slično, kofinitni elementi čine maksimalan filter koji isto nije glavni.

Propozicija 2.20.

Neka je I pravi ideal u Booleovoj algebri B. Tada postoji maksimalan ideal $M \supseteq I$. Isto vrijedi za filtere.

Dokaz:

Neka je $\mathcal{S}$ skup svih pravih ideala koji sadrže I. Ideal $I \in \mathcal{S}$, pa je $\mathcal{S}$ neprazan.

Neka je $L = \{I_i : i \in K\}$ lanac u $\mathcal{S}$ indeksiran proizvoljnim lancem K. Neka je $N = \bigcup L$. Lako se vidi da je N ideal, da sadrži I i da ne sadrži 1 (tj. pravi je), dakle $I \in \mathcal{S}$. Sada po Zornovoj lemi $\mathcal{S}$ ima maksimalan element, koji je onaj koji tražimo.

Tvrdnja sa filterima je dualna. ■

Propozicija 2.21.

Neka je I pravi ideal u Booleovoj algebri B. Ekvivalentno je:

(i) Ideal I je maksimalan.

(ii) Za svaki $a \in B$ je ili $a \in I$ ili $-a \in I$.

(iii) Skup $B \backslash I$ je filter.

Vrijedi i dualna tvrdnja. Ako vrijede gornje tvrdnje, filter u (iii) je također maksimalan.

Dokaz:

(ii)$\Rightarrow$(i): Neka je $J \supset I$ ideal. Tada postoji $a \in J \backslash I$. Prema (ii) je onda $-a \in I \subseteq J$, pa je i $1 = a \vee -a \in J$, tj. $J = B$. Dakle I je maksimalan.

(i)$\Rightarrow$(ii): Pretpostavimo da (ii) ne vrijedi, tj. da za neki a vrijedi $a, -a \notin I$. Neka je $C = \{a \vee x \colon x \in I\}$ i $D = \{x \in B \colon x \leq y \in C\}$. Lako se vidi da je D ideal koji sadrži I i a. Kad bi bio $1 \in C$ postojao bi $x \in I$ takav da je $a \vee x = 1$ iz čega djelovanjem sa $\wedge - a$ dobijemo $x \wedge -a = -a$ tj. $-a \leq x \in I$, što je protivno pretpostavci. Dakle $1 \notin C$, pa jasno $1 \notin D$, tj. D je pravi ideal. Našli smo pravi ideal strogo veći do I, pa I nije maksimalan.

(ii)$\Rightarrow$(iii): $B \backslash I$ je jasno zatvoren prema gore. Neka su $a, b \notin I$, pa po (ii) su $-a, -b \in I$. Vrijedi $-(a \wedge b) = -a \vee -b \in I$, pa $a \wedge b \notin I$.

(iii)$\Rightarrow$(ii): Pretpostavimo da (ii) ne vrijedi, tj. da za neki a vrijedi $a, -a \notin I$. Tada je $a \wedge -a = 0 \in I$, dakle $B \backslash I$ ne može biti filter.

Dualna tvrdnja je jasna. Jasno, $I = B \backslash (B \backslash I)$ je ideal, pa po dualnoj tvrdnji mora filter $B \backslash I$ biti maksimalan. ∎

Korolar 2.22.

Neka je I maksimalan ideal na Booleovoj algebri B. Tada je funkcija sa B u dvoelementnu Booleovu algebru definirana sa

$$f(a) = \begin{cases} 0 & za\ a \in I \\ 1 & za\ a \notin I \end{cases}$$

homomorfizam.

Obrnuto, za svaki homomorfizam h sa B u dvoelementnu Booleovu algebru je $h^{-1}(0)$ maksimalan ideal, a $h^{-1}(1)$ maksimalan filter.

Gornja propozicija i korolar uvode međusobno prirodno pripadanje maksimalnih ideala, maksimalnih filtera i homomorfizama na dvoelementnu Booleovu algebru.

Definicija 2.L

Topološki prostor je *nula-dimenzionalan* ako je neprazan T_1-prostor i ima bazu koja se sastoji od otvoreno-zatvorenih skupova.

Teorem 2.23. (Stoneov teorem o reprezentaciji Booleovih algebri)
Svaka Booleova algebra B je izomorfna polju otvoreno-zatvorenih skupova u kompaktnom nula-dimenzionalnom Hausdorffovom prostoru.

Dokaz:
Neka je $S(B)$ skup svih ultrafiltera u B. (Analogno bismo mogli raditi sa maksimalnim idealnima ili homomorfizama na dvoelementnu Booleovu algebru).

Za svaki $a \in B$ neka je $O(a) = \{F \in S(B) \colon a \in F\} \subseteq S(B)$. Vrijedi $O(1) = S(B)$. Za $a, b \in B$, $O(a) \cap O(b) = \{F \in S(B) \colon a, b \in F\} = \{F \in S(B) \colon a \wedge b \in F\} = O(a \wedge b)$. Dakle, skupovi $O(a)$ za $a \in B$ čine bazu topologije na $S(B)$. Od sada ćemo, iako neprecizno, sa $S(B)$ označavati i tako dobiveni topološki prostor.

Pokažimo da je $S(B)$ Hausdoorffov. Neka su $F, G \in S(B)$, $F \neq G$. Tada postoji $a \in F \backslash G$ (ili $G \backslash F$, ali možemo pretpostaviti ovo prvo). No G je ultrafilter, pa je $-a \in G$. Dakle, $F \in O(a)$, $G \in O(-a)$, a $O(a)$ i $O(-a)$ su jasno disjunktni otvoreni. Dakle, $S(B)$ je Hausdorffov.

Komplement od $O(a)$ je $O(-a)$ koji je onda isto otvoren, dakle $O(a)$ je otvoreno-zatvoren. Radi toga i hausdorffovosti je $S(B)$ nula-dimenzionalan.

Pokažimo da je $S(B)$ kompaktan. Neka je $\mathcal{P}$ otvoren pokrivač od $S(B)$. Možemo pretpostaviti da se $\mathcal{P}$ sastoji od elemenata baze, tj. neka je $\mathcal{P} = \{O(a) \colon a \in A\}$, gdje je $A \subseteq B$. Jer je $\mathcal{P}$ pokrivač, svaki ultrafilter $F \in S(B)$ se nalazi u nekom $O(a)$, $a \in A$, tj. svaki ultrafilter sadrži neki element iz A. Neka je C skup svih (konačnih) spojeva elemenata iz A tj. $C = \{\bigvee S \colon S \text{ konačan } \subseteq A\}$. Neka je $D = \{a \in B \colon a \leq b \in C\}$. Jasno je D ideal. Pretpostavimo da je pravi. Onda sa E označimo maksimalni ideal koji sadrži D. Ultrafilter $B \backslash E$ ne sadrži niti jedan element od D, pa onda niti od C niti od A, što je kontradikcija. Dakle, ideal D nije pravi, tj. $1 \in D$, pa je i $1 \in C$, tj. $1 = \bigvee A'$ gdje je A' konačan podskup od A. Ako ultrafilter F ne sadrži niti jedan element od A' onda ne sadrži niti 1 što ne može biti. Dakle svaki ultrafilter sadrži neki $a \in A'$ tj. svaki ultrafilter je u nekom $O(a)$ za $a \in A'$ kojih ima konačno. To je i trebalo dokazati.

Funkcija $O \colon a \mapsto O(a)$ je jasno monomorfizam sa Booleove algebre B na polje otvoreno-zatvorenih skupova u $S(B)$. Dokažimo da je i surjekcija, tj. da je svaki otvoreno-zatvoreni skup U u $S(B)$ slika nekog $a \in B$. U kao otvoren skup je unija nekih elemenata baze, tj. $U = \bigcup\{O(a) \colon a \in A\}$ za neki $A \subseteq B$. U kao zatvoren skup u kompaktnom prostoru je i sam kompaktan, pa njegov pokrivač $\{O(a) \colon a \in A\}$ ima konačan potpokrivač $\{O(a) \colon a \in K\}$, tj. $U = \bigcup\{O(a) \colon a \in K\} = O(\bigvee K)$. **Q.E.D.**

Definicija 2.M
Prostor $S(B)$ iz prethodnog teorema se zove *Stoneov prostor* Booleove algebre B.

Korolar 2.24.
Svaka Booleova algebra B je izomorfna polju skupova.

Gornji korolar je veoma koristan, jer ako znamo osnovna svojstva operacija na poljima skupova, znamo ih i na Booleovim algebrama. Dakle, cijeli odjeljak 2.2. (propozicije 2.2.–2.7.) slijedi iz navedenog korolara. No propozicije 2.2.–2.5. ipak moramo dokazati neovisno, jer se koriste u dokazu Stoneovog teorema, propoziciju 2.6. ćemo ostaviti jer je korisna za proširenje na beskonačne skupove, dok propoziciju 2.7. možda ne znamo niti za polja skupova, pa je svakako potreba.

Korolar 2.25.
Svaka konačna Booleova algebra B je izomorfna partitivnom skupu konačnog skupa.

Dokaz:
Ako je B konačan, i $S(B)$ je konačan. Konačan Hausdorffov prostor je diskretan, iz čega slijedi tvrdnja. ■

Primjer XVIII
Neka je K konačno-kofinitna algebra na prebrojivom skupu X. Glavni filteri nad atomima i filter kofinitnih elemenata su ultrafilteri. Tvrdimo da su to jedini ultrafilteri.
Neka je F ultrafilter. Ako se neki element $x \in X$ nalazi u svakom elementu od F, onda je $F_{\{x\}}$ ultrafilter koji sadrži F, dakle jednak je F, pa je F glavni. U protivnom pretpostavimo da postoji konačan $S \in F$. Za svaki $x \in S$ postoji element $A(x) \in F$ koji ne sadrži x. Skup $S \setminus (\bigvee_{x \in S} A(x)) = \emptyset$ bi onda bio uF, što ne može biti. Dakle u F nema konačnih skupova, pa kao ultrafilter mora sadržavati sve kofinitne.
Dakle, Stoneov prostor $S(K)$ možemo prezentirati sa $\omega + 1$ gdje elementi od ω prezentiraju glavne ultrafiltere, a ω prezentira ultrafilter kofinitnih skupova.
Bazu Stoneove topologije na $\omega+1$ čine konačni podskupovi od ω i skupovi koji sadrže ω i gotovo sve elemente iz ω. Dakle, svaka točka u ω je otvorena (tj. restrikcija topologije na ω je diskretna), a svaki otvoren skup koji sadrži ω sadrži i sve elemente veće od nekog $n \in \omega$. Opet smo dobili uobičajenu uređajnu topologiju na $\omega + 1$.

2.6. Potpunost

Željeli bismo praviti spoj i klin proizvoljnog skupa, a ne samo konačnoga. Međutim, to nije uvijek moguće. Definirajmo:

Definicija 2.N

Ako neprazan $A \subseteq B$ ima supremum, zovemo ga *spoj* elemenata iz A i označavamo sa $\bigvee A$. Ako neprazan A ima infimum njega zovemo *klin* elemenata iz A i označavamo sa $\bigwedge A$.

Booleova algebra B je *potpuna* ako svaki $A \subseteq B$ ima supremum.

Neka je κ kardinalni broj. Skup kardinalnosti $\leq \kappa$ ćemo zvati *κ-skup*.

Neka je κ beskonačan kardinalni broj. Booleova algebra B je *κ-potpuna* ako svaki κ-skup $A \subseteq B$ ima supremum. Booleovu algebru koja je κ-potpuna zovemo još i Booleova κ-algebra.

Prema propoziciji 2.6. nova definicija spoja i klina poklapa sa starom za konačne skupove.

Kardilani broj $\aleph_0 = \omega$ u ovom ćemo radu označavati sa σ.

Primijetimo da u potpunoj Booleovoj algebri svaki skup ima i infimum, jer je on komplement supremuma komplemenata. Analogna tvrdnja vrijedi za κ-potpune Booleove algebre.

Primjer XIX

Partitivni skup je potpuna Booleova algebra.

Konačno kofinitna algebra nije σ-potpuna.

Neka su $\kappa < \lambda$ kardinalni brojevi i neka je X skup kardinalnosti λ. Neka se K sastoji od κ-podskupova od X i od onih kojima je komplement u X κ-skup. Skup K jasno čini Booleovu algebru. Lako se vidi da je K κ-potpuna, ali nije λ-potpuna.

Primjer XX (Cohenova algebra)

Neka je $\{x_n : n \in \omega\}$ disjunktna familija beskonačnih podskupova od ω. Neka je C Cohenova algebra na ω i neka je $[x]$ jedna gornja međa od $A := \{[x_n] : n \in \omega\}$. Izaberimo u svakome $x_n \cap x$ po jedan element ξ_n (x mora sadržavati gotovo sve elemente iz svakog x_n) i neka je $y_n = x_n \backslash \{\xi_n\}$, a $z = \{\xi_n : n \in \omega\}$. Jasno je $[x \backslash z]$ gornja međa od svakog $[y_n] = [x_n]$, pa je i gornja međa od A. Međutim, z je beskonačan i podskup je od x, pa je $[x \backslash z] = [x] - [z] < [x]$. Za proizvoljnu gornju među našli smo manju, pa A

nema supremum, dakle C nije potpuna. Štoviše, vidimo da nije ni σ-potpuna.

Propozicija 2.26. (De Morganovi zakoni)
Neka su $a_i \in B$ za $i \in I$. Tada je

$$-\bigvee_{i\in I} a_i = \bigwedge_{i\in I} -a_i,$$
$$-\bigwedge_{i\in I} a_i = \bigvee_{i\in I} -a_i.$$

Gornje jednakosti treba čitati: ako postoji jedna strana, onda postoji i druga i jednake su.

Dokaz:
Ako postoji desna strana prve jednakosti označimo je sa d. Tada za svaki i vrijedi $d \leq -a_i$, tj. $-d \geq a_i$. Ako je $-d'$ neki drugi za koji za svaki i vrijedi $-d' \geq a_i$, odnosno $d' \leq -a_i$, onda je i $d' \leq \bigwedge -a_i = d$. Dakle, $-d$ je najveća donja međa od $\{a_i : i \in I\}$, tj. $-d = \bigvee a_i$.
Ako krenemo od lijeve strane dokaz je potpuno analogan. Druga jednakost je dualna.
∎

Primjer XXI (Algebra regularno otvorenih skupova)
Neka je R algebra regularno otvorenih skupova na topološkom prostoru $T = (X, \tau)$. Iz definicije klina na R i uređaja na algebri taj se uređaj podudara s uređajem inkluzije, tj.

$$a \leq b \qquad \Leftrightarrow \qquad a \subseteq b.$$

Neka je u otvoren u T. Skup $u' := ic(u) \supseteq u$ je regularno otvoren. Dokažimo da je u' upravo najmanji regularno otvoren veći od u. Pa neka je $u'' \supseteq u$ regularno otvoren. Tada je $u'' = ic(u'') \supseteq ic(u) = u'$.
Neka je $A \subseteq R$ proizvoljan skup. Najmanji otvoren veći od svih elemenata iz A je jasno $\bigcup A$. Najmanji regulatno otvoren veći od svih elemenata iz A je zato $ic(\bigcup A)$.
Dakle, Algebra regularno otvorenih skupova je potpuna, i spoj se definira sa:

$$\bigvee A = ic\left(\bigcup A\right).$$

Nađimo formulu za klin pomoću de Morganovih zakona:

$$\bigwedge_{i\in I} a_i = -\bigvee_{i\in I} -a_i = \operatorname{int}\left(X \backslash \operatorname{int}\left(\operatorname{cl}\left(\bigcup \operatorname{int}\left(X \backslash a_i\right)\right)\right)\right) =$$
$$= \operatorname{int}\left(\operatorname{cl}\left(\operatorname{int}\left(\bigcap \operatorname{cl}\left(a_i\right)\right)\right)\right) = \operatorname{int}\left(\bigcap \operatorname{cl}\left(a_i\right)\right).$$

Dokažimo još neke korisne tvrdnje za beskonačne spojeve i klinove.

Propozicija 2.27.
Neka je $a \in B$ i $a_i \in B$ za $i \in I$. Ako postoji lijeva strana jednakosti, vrijede jednakosti:

$$a \wedge \bigvee_{i \in I} a_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge a_i),$$

$$a \vee \bigwedge_{i \in I} a_i = \bigwedge_{i \in I} (a \vee a_i).$$

Dokaz:
Neka je $b = \bigvee a_i$. Tada je za svaki i $a_i \leq b$, pa je i $a \wedge a_i \leq a \wedge b$. Pretpostavimo da je c neka druga gornja međa od $\{a \wedge a_i : i \in I\}$, tj. $a \wedge a_i \leq c$ za svaki i. Tada je $a - c \leq -a_i$ za svaki i, pa je i $a - c \leq \bigwedge -a_i$ koji postoji po de Morganovim zakonima i jednak je $-b$. Sada dobijamo $a \wedge b \leq c$, što je trebalo pokazati.
Druga jednakost je dualna. ∎

Propozicija 2.28.
Neka je a atom i $A \subseteq B$ neprazan skup koji ima supremum. Ako je $a \leq \bigvee A$ onda postoji $x \in A$ takav da je $a \leq x$.

Dokaz:
Za $x \in A$ je $a \wedge x \leq a$, dakle $a \wedge x$ je jednako ili 0 ili a. Kad bi uvijek bilo 0, svaki $x \in A$ bi bio podelement od $-a$, pa bi i $\bigvee A$ bio podelement od $-a$, što nije. ∎

Homomorfizam ne mora čuvati beskonačne spojeve, što nam pokazuje sljedeći primjer.

Primjer XXII (Homomorfizan ne čuva beskonačne spojeve)
Neka je X beskonačan skup i $x \in X$. Neka Booleovu algebru K čine svi konačni podskupovi od $X \backslash \{x\}$ i njihovi komplementi u X. Dakle, K je slična konačno-kofinitnoj algebri, samo što ima jedan poseban element koji je kao indikator beskonačnosti, nije u skupu ako je konačan i jest u skupu ako je beskonačan. I neka je P Booleova algebra partitivnog skupa na X. Inkluzija $i \colon K \hookrightarrow P$ je jasno homomorfizam. Neka je $A = \{\{y\} : a \in X \backslash \{x\}\} \subseteq K$. Najmanji element iz K koji sadrži sve elemente iz A je sam X, dakle $\bigvee A = 1$. Međutim, najmanji element u P koji sadrži $i(a)$ za svaki $a \in A$ je $X \backslash \{x\}$, dakle $\bigvee i(S) = X \backslash \{x\}$.

Definicija 2.O

Skup $D \subseteq B$ je *algebarski gust* ako za svaki ne-nul $b \in B$ postoji ne-nul $d \in D$ takav da je $d \leq b$.

Propozicija 2.29.

Neka je B potpuna Booleova algebra i A neka njena podalgebra. Algebra A je algebarski gusta u B ako i samo ako za svaki $b \in B$ postoji neprazan $S \subseteq A$ takav da je $b = \bigvee S$.

Dokaz:

Neka je A algebarski gusta i neka je $b \in B$. Tada postoji $a \in A$, $a \leq b$. Skup svih takvih a označimo sa S, i neka je $b' = \bigvee S$. Jasno je $b' \leq b$, pa je $b' \in S$. Pretpostavimo da je $x := b - b'$ različit od 0. Tada postoji ne-nul $y \leq x$ u A koji je kao podelement od b i u S. No tada je i $b' \wedge y$ u A, pa je kao podelement od b i u S. Ali je $b' \wedge y > b'$ što ne može biti. Dakle, $b = \bigvee S$.

Obratno, neka je b ne-nul element od B. Tada je $b = \bigvee S$ za neki $S \subseteq A$. Jasno je $S \supset \{0\}$. Bilo koji ne-nul element od S je podelement od b koji je u A. ∎

Definicija 2.P

Upotpunjenje Booleove algebre B je potpuna Booleova algebra P za koju postoji monomorfizam $h\colon B \to P$ takav da je slika $h(B)$ gusta u P.

Teorem 2.30.

Svaka Booleova algebra B ima upotpunjenje.

Dokaz:

Neka je P Booleova algebra regularno otvorenih skupova u Stoneovom prostoru $S(B)$. Svi otvoreno-zatvoreni skupovi su regularno otvoreni, pa postoji prirodna injekcija $h\colon B \to P$, za koju se lako vidi da je homomorfizam, dakle monomorfizam.

Znamo da je P potpun. Treba samo dokazati da otvoreno-zatvoreni skupovi čine gustu podalgebru od P. Neka je $O \in P$ ne-nul, dakle regularno otvoren u $S(B)$. Kao otvoren mora sadržavati element baze topologije, koju čine otvoreno-zatvoreni skupovi.**Q.E.D.**

2.7. Antilanci i slaba distributivnost

Definicija 2.Q

Skup $A \subseteq B$ koji ne sadrži 0 je *antilanac* ako su svaka dva elementa iz A disjunktna.

Propozicija 2.31.

1. *Svaki antilanac je sadržan u nekom maksimalnom antilancu s obzirom na inkluziju.*
2. *Antilanac M je maksimalan ako i samo ako je $\bigvee M = 1$.*

Dokaz:

1. Jasno po Zornovoj lemi.
2. Dovoljnost je jasna. Obratno, pretpostavimo suprotno, da 1 nije supremum od M (koji ne mora niti postojati). Tada postoji $a < 1$ koji je gornja međa od M. Skup $M \cup \{-a\}$ je jasno antilanac, strogo veći od M što je kontradikcija. ∎

Da ne bi došlo do zabune, kada samo piše maksimalni antilanac, misli se na onaj kojemu je spoj 1, a ako piše maksimalan antilanac s nekakvim uvjetom, onda se misli na maksimalan antilanac među onima koji zadovoljavaju taj uvjet, za koji će uglavnom po Zornovoj lemi opet biti očito da postoji.

Definicija 2.R

Neka je κ neprebrojiv kardinalni broj. Booleova algebra B zadovoljava *uvjet κ-lanca* ako je svaki antilanac u njoj kardinaliteta manjeg od κ.

Booleova algebra B zadovoljava *uvjet prebrojivog lanca* ili *ccc* (od engl. *countable chain condition*) zadovoljava uvjet ω_1-lanca, tj. ako je svaki antilanac u njoj prebrojiv. Kažemo još da je Booleova algeba *ccc*.

Primjer XXIII

Partitivni skup $\mathcal{P}(X)$ zadovoljava uvjet κ-lanca ako i samo ako je $|X| < \kappa$.

Propozicija 2.32.

Neka je κ neprebrojiv kardinalni broj. Booleova algebra B zadovoljava uvjet κ-lanca ako i samo ako svaki $E \subseteq B$ ima podskup D kardinaliteta manjeg od κ koji ima isti skup gornjih međa kao E.

Dokaz:

Neka B zadovoljava uvjet κ-lanca i neka je $E \subseteq A$. Definirajmo ideal:

$$I = \left\{a \in B\colon \text{ postoji konačan } K \subseteq E \text{ takav da je } a \leq \bigvee K\right\} \supseteq E.$$

Jasno je da E i I imaju zajednički skup gornjih međa. Neka je M maksimalni antilanac sastavljen od elemenata iz I, koji postoji po Zornovoj lemi. Kardinalitet od M je manji od κ.

Pretpostavimo da je $a \in B$ gornja međa od M, ali nije od I. Zato postoji $b \in I$ takav da nije $a > b$. Ne-nul element $b - a$ je u idealu I, ali je disjunktan sa svakim elementom od M. Zato ga možemo dodati M-u i dobiti veći antilanac sastavljan od elemenata iz I, što je kontradikcija. Dakle, i M ima isti skup gornjih međa kao I i E. Po definiciji je svaki element od I podelement konačnog spoja elemenata od E. Za $m \in M$ neka je $D(m)$ skup tih konačno elemenata. Skup $D \coloneqq \bigcup_{m \in M} D(m)$. Zato opet ima isti skup gornjih međa kao M, I i E, podskup je od E i kao unija manje od κ konačnih skupova je kardinaliteta manjeg od κ.

Obratno, neka je $A \subseteq B$ antilanac i neka je $D \subseteq A$ skup kardinaliteta manjeg od κ koji ima isti skup gornjih međa kao A. Kada bi A imao element a koji nije u D, onda bi svaki element od D bio podelement od $-a$, tj. $-a$ bi bila gornja međa od D, pa i od A, što ne može biti. Zato je $A = D$. ■

Korolar 2.33.

Booleova σ-algebra koja zadovoljava ccc je potpuna.

Definicija 2.S

Booleova algebra B je *slabo distributivna na* ne-nul elementu $a \in B$ ako za svaki niz $(P_n)_n$ prebrojivih maksimalnih antilanaca postoji ne-nul $b \leq a$ disjunktan sa gotovo svim elementima od svakog P_n.

Booleova algebra B je *slabo distributivna* ako je slabo distributivna na svakom svom ne-nul elementu.

Booleova algebra B je *nigdje slabo distributivna* ako nije slabo distributivna na 1.

Propozicija 2.34.

Svaka atomska Booleova algebra je slabo distributivna.

Dokaz:

Neka su $(P_n)_n$ prebrojivi maksimalni antilanci i $a \in B$. Neka je $b \leq a$ atom. Uzmimo neki antilanac P_n. Prema propoziciji 2.28. b je manji od nekog elementa od P_n, pa onda mora biti disjunktan sa svima ostalima. Dakle, atom b susreće samo jedan element svakog antilanca. ■

Primjer XXIV (Nigdje slabo distributivna algebra)

Neka je R Booleova algebra regularno otvorenih skupova na intervalu $I = \langle 0, 1\rangle$. Za racionalni $q \in I$ i $n \in \omega$ neka je

$$U_n^q = I \cap \left(\left\langle q - \frac{1}{n+1}, q + \frac{1}{n+1} \right\rangle \setminus \left[q - \frac{1}{n+2}, q + \frac{1}{n+2} \right] \right).$$

Neka je $P_q = \{U_n^q \colon n \in \omega\}$. Lako se vidi da je P_q prebrojiv maksimalni antilanac. Racionalnih brojeva ima prebrojivo mnogo, pa je prebrojivo tih antilanaca.

Neka je $a \in R$ ne-nul. On je otvoren, pa sadrži neki racionalni broj, recimo r, i za neki $\epsilon > 0$ sadrži interval $\langle r - \epsilon, r + \epsilon\rangle$. No onda sadrži i U_n^r iz P_r za sve $n > 1/\epsilon$, kojih je beskonačno.

Dakle, R je nigdje slabo distributivna.

Lema 2.35.

Booleova algebra B nije slabo distributivna na $d \in B$ ako i samo ako je $B \restriction d$ nigdje slabo distributivna.

Dokaz:

Ako B nije slabo distributivna na d, postoji niz prebrojivih maksimalnih antilanaca $(P_n)_n$ takav da svaki $a \leq d$ susreće beskonačno elemenata od P_m za neki m. Neka je

$$Q_n = \{x \wedge d \colon x \in P_n \text{ i } x \wedge d \neq 0\}.$$

Jasno je Q_n maksimalni antilanac na $B \restriction d$ te ako je a susretao $x \in P_m$ onda susreće i $x \wedge a \in Q_m$, pa dakle susreće beskonačno elemenata iz Q_m. Kako je a bio proizvoljan manji od d, tj. od 1 u $B \restriction d$, $B \restriction d$ je nigdje slabo distributivna.

Obratno, neka je $B \restriction d$ nigdje slabo distributnivna, tj. nije slabo distributivna na 1, koji je u ovom slučaju d. Zato postoji niz prebrojivih maksimalnih antilanaca $(Q_n)_n$ u $B \restriction d$ takav da svaki $a \leq d$ susreće beskonačno elemenata od Q_m za neki m. Neka je $P_n = Q_n \cup \{-d\}$. Jasno je $\bigvee P_n = -d \vee \bigvee P_n = -d \vee d = 1$ i svi u njemu su disjunktni, pa je Q_n maksimalni antilanac u B. Element a susreće beskonačno elemenata i iz P_m, naime one iste. Zato B nije slabo distributrivna na d. ■

Teorem 2.36.

Neka je B potpuna ccc Booleova algebra koja nije slabo distributivna. Tada postoji ne-nul $d \in B$ takav da je $B \restriction -d$ slabo distributivna, a $B \restriction d$ nigdje slabo distributivna.

Dokaz:

Neka je D skup svih $a \in B$ na kojima B nije slabo distributivna, i neka je $d = \bigvee D$. Ako je $d = 0$ B je slabo distributivna, pa razmatramo situaciju kada je $d > 0$. Direktno iz definicije se vidi da je D zatvoren prema dolje. Dokažimo da je $b \in D$, tj. da B nije slabo distributivna na d.

Neka je M maksimalni antilanac koji se sastoji od elemenata iz D. Jasno je $\bigvee M \leq d$ i M je prebrojiv radi ccc. Pretpostavimo da je $\bigvee M < d$. Tada $a := d - \bigvee M$ mora susretati neki $b \in D$ jer inače d nebi bio supremum od D. Klin $a \wedge b \leq b \in D$, pa je i on iz D. Zato ga možemo dodati antilancu M i dobiti veći antilanac, što je kontradikcija. Zato je $\bigvee M = d$.

Algebra B nije slabo distributivna niti na jednom $a \in M$, pa onda za njega postoji niz maksimalni antilanaca $(P_n^{(a)})_n$ takav da svaki $d \leq a$ susreće beskonačno elemenata od $P_n^{(a)}$ za neki n. Skup svih $(P_n^{(a)})_n$ za sve $a \in M$ i $n \in \omega$ je prebrojiv jer je prebrojiva unija prebrojivih, pa sve te antilance možemo poredati u niz $(P_n)_n$. Neka je $e \leq d$. On jasno susreće neki $b \in M$, pa neka je $e' = e \wedge b$. Taj e' susreće beskonačno elemenata od nekog antilanca iz $(P_n^{(b)})_n$, ali taj isti antilanac je i u $(P_n)_n$. Zato i e susreće beskonačno elemenata tog antilanca iz $(P_n)_n$. Dakle, B nije slabo distributivna na d.

Dalje je lako. Po prethodnoj lemi je $B \upharpoonright d$ nigdje slabo distributivna. Pretpostavimo da $B \upharpoonright -d$ nije slabo distributivna, tj. da postoji ne-nul $a \leq -d$ na kojemu $B \upharpoonright -d$ nije slabo distributivna. Tada je po lemi $(B \upharpoonright -d) \upharpoonright a = B \upharpoonright a$ nigdje slabo distributivna, a onda opet po lemi B nije slabo distributivna na a. Ali a nije podelement od d što se kosi s definicijom od d. Dakle, $B \upharpoonright -d$ je slabo distributivna. **Q.E.D.**

Poglavlje 3.

Maharamin prostor

3.1. Uvođenje topologije

Definicija 3.A

Neka je $(a_n)_{n\in\omega}$ niz u Booleovoj σ-algebri B. Definirajmo *limes superior*

$$\overline{\lim_n} a_n = \bigwedge_{k\in\omega} \bigvee_{n\geq k} a_n$$

i *limes inferior*

$$\underline{\lim_n} a_n = \bigvee_{k\in\omega} \bigwedge_{n\geq k} a_n.$$

Ako se gornja dva limesa podudaraju, kažemo da niz $(a_n)_n$ *algebarski konvergira* prema $\overline{\lim_n} a_n = \underline{\lim_n} a_n$.

Nizovnu familiju koja se sastoji od svih $(a_n \xrightarrow[n]{} a)$ gdje $(a_n)_n$ algebarski konvergira prema a zovemo *familija algebarske konvergencije* na B, u oznaci $\mathcal{B}_B$.

U ovom poglavlju će sve Booleove algebre biti σ-potpune, ako nije drugačije rečeno.

Propozicija 3.1.

Neka je $(a_n)_n$ niz u B. Tada je

$$\underline{\lim_n} a_n \leq \overline{\lim_n} a_n$$

Dokaz:

Izaberimo članove u definiciji limesa superior i limesa inferior, $\bigvee_{n\geq k} a_n$ i $\bigwedge_{n\geq l} a_n$. Možemo pretpostaviti da je $k \leq l$. Tada je $\bigvee_{n\geq k} a_n \geq a_l \geq \bigwedge_{n\geq l} a_n$. Dakle, svaki član iz definicije limesa superior je veći od svakog člana iz definicije limesa inferior, pa je veći i od limesa inferior (koji je spoj članova). Analogno je onda limes superior veći od limesa inferior.

Propozicija 3.2.

Niz $(a_n)_n$ u Booleovoj σ-algebri algebarski konvergira ako i samo ako postoje rastući niz $(b_n)_n$ i padajući niz $(c_n)_n$ takvi da je $b_n \leq a_n \leq c_n$ za sve $n \in \omega$ i $\bigvee_{n\in\omega} b_n = \bigwedge_{n\in\omega} c_n$. Tada je njegov limes upravo $\bigvee_{n\in\omega} b_n = \bigwedge_{n\in\omega} c_n$.

Dokaz:

Ako niz $(a_n)_n$ algebarski konvergira, lako se vidi da tvrdnja vrijedi za $b_n = \bigwedge_{m\geq k} a_m$ i $c_n = \bigvee_{m\geq n} a_m$.

Ako pak postoje takvi nizovi $(b_n)_n$ i $(c_n)_n$, onda je $b_n \leq a_m$ za $m \geq n$, pa je i $b_n \leq \bigwedge_{m\geq k} a_m$, dakle $\bigvee_{n\in\omega} b_n \leq \underline{\lim}_n a_n$. Analogno je $\bigwedge_{n\in\omega} c_n \geq \overline{\lim}_n a_n$, iz čega slijedi tvrdnja propozicije. ■

Korolar 3.3.

Familija algebarske konvergencije $\mathcal{B}_B$ je prava baza konvergencije.

Dokaz:

Samo se prisjetimo što treba pokazati: svi konstantni fiksirani nizovi su elmenti od $\mathcal{B}_B$, podniz niza iz $\mathcal{B}_B$ je iz $\mathcal{B}_B$ i niti jedan niz nema dva algebarska limesa. Sve je očito. ■

Definicija 3.B

Topologiju $\tau_{\mathcal{B}_B}$ zovemo *Maharamina topologija* na Booleovoj σ-algebri B i od sada ćemo je označavati sa τ_s. Topološki prostor $T = (B, \tau_s)$ zovemo *Maharamin prostor*.

Pridruženu familiju konvergencije bazi $\mathcal{B}$, tj. familiju konvergencije topologije τ_s ćemo označavati sa $\mathcal{K}_B$. Konvergencije u topologiji τ_s ćemo zvati *topološke* konvergencije, da ih ne miješamo sa algebarskim konvergencijama.

Dokažimo neka korisna svojstva konvergencija.

Propozicija 3.4.

Neka su $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ nizovi u B. Tada vrijedi

1. *$(x_n \xrightarrow[n]{} 0) \in \mathcal{B}_B \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\lim}_n a_n = 0;$*

   $(x_n \xrightarrow[n]{} 1) \in \mathcal{B}_B \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\lim}_n a_n = 1.$
2. *Ako je $(x_n \xrightarrow[n]{} 0) \in \mathcal{B}_B$ i $y_n \leq x_n$ za svaki n, onda je i $(y_n \xrightarrow[n]{} 0) \in \mathcal{B}_B$.*
3. *Ako je $(x_n \xrightarrow[n]{} 0) \in \mathcal{K}_B$ i $y_n \leq x_n$ za svaki n, onda je i $(y_n \xrightarrow[n]{} 0) \in \mathcal{K}_B$.*
4. *Ako je $\{x_n\}_{n\in\omega}$ antilanac u B onda je $(x_n \xrightarrow[n]{} 0) \in \mathcal{B}_B$.*
5. *Ako je $(x_n)_n$ rastući, onda algebarski konvergira prema $\bigvee_{n\in\omega} x_n$. Dualno, ako je padajući, onda algebarski konvergira prema $\bigwedge_{n\in\omega} x_n$.*
6. *Ako je $(x_n \xrightarrow[n]{} x) \in \mathcal{K}_B$, onda je $\underline{\lim}_n x_n \leq x \leq \overline{\lim}_n x_n$.*

Dokaz:

1. Jasno iz propozicije 3.1.
2. Jasno iz 1.
3. Svaki podniz $(x_{n_i} \xrightarrow[i]{} 0)$ fiksiranog niza $(x_n \xrightarrow[n]{} 0)$ ima podniz $(x_{n_{i_j}} \xrightarrow[j]{} 0)$ koji je iz $\mathcal{B}_B$, pa onda i podniz $(y_{n_i} \xrightarrow[i]{} 0)$ fiksirano niza $(y_n \xrightarrow[n]{} 0)$ ima podniz $(y_{n_{i_j}} \xrightarrow[j]{} 0)$ iz $\mathcal{B}_B$, jer je ograničen fiksiranim nizom $(x_{n_{i_j}} \xrightarrow[j]{} 0)$.
4. Neka je $a = \overline{\lim}_n x_n$ i $a_n = a \wedge x_n$. Jasno je $a \leq 1 = \bigvee_n x_n$, pa je po propoziciji 2.27. $a = \bigvee_n a_n$. Međutim, za svaki n je $a_n \leq a \leq \bigvee_{m\geq n+1} x_m$. Zato je po 2.27.

   $$a_n \leq x_n \wedge \bigvee_{m\geq n+1} x_m = \bigvee_{m\geq n+1} (x_m \wedge x_n) = \bigvee_{m\geq n+1} 0 = 0.$$

   Dakle, za svaki n je $a_n = 0$, pa je i $a = 0$.
5. Samo treba uvrstiti u definiciju.
6. Niz $(x_n)_n$ ima podniz kojemu je limes inferior jednak x, a direktno iz definicije vidimo da limes inferior podniza ne može biti manji od limesa inferiora niza. Analogno vrijedi za limes superior. ■

Familija algebarske konvergencije nije općenito familija konvergencije, tj. $\mathcal{B}_B$ i $\mathcal{K}_B$ se općenito razlikuju, što pokazuje sljedeći primjer:

Primjer XXV (Različite algebarska i topološka konvergencija)

Proučimo Booleovu algebru B regularno otvorenih skupova na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. U njoj za $n \in \omega$ i $k \in 2^n$ (ako niste bliski sa teorijom skupova, prirodan broj n je jednak skupu $\{0, 1, \ldots, n-1\}$) definirajmo elemente $a_k^{(n)} = \langle k \cdot 2^{-n}, (k+1) \cdot 2^{-n}\rangle$. Skup svih takvih elemenata nazovimo S. Elementi iz S se mogu prirodno poredati u niz $(x_i)_i$ tako da je $a_k^{(n)}$ prije $a_{k'}^{(n')}$ ako je $n < n'$ ili $n = n'$ i $k < k'$.

Primijetimo da na S vrijedi: za $i < j$ su x_i i x_j ili disjunktni ili je $x_i \supset x_j$. Lako se vidi da je $\overline{\lim}\, x_i = 1$ i $\underline{\lim}\, x_i = 0$, dakle $(x_i)_i$ ne konvergira algebarski. Dokažimo da konvergira topološki.

Neka je $(y_i)_i$ proizvoljan podniz od $(x_i)_i$, kojemu je slika $S' \subseteq S$. Proučimo dva slučaja:

I. Skup S' sadrži beskonačni lanac s obzirom na inkluziju. Označimo onda sa $(z_i)_i$ podniz od $(y_i)_i$ koji čine elementi tog lanca. Jasno, uređaj u nizu $(z_i)_i$ je isti kao uređaj inkluzije. Vrijedi $\overline{\lim}\, z_i = \bigwedge z_i = \mathrm{int}\,(\bigcap \mathrm{cl}\,(z_i))$. Skupovi y_i su intervali čija duljina teži u nulu kako i ide u beskonačno, pa je $\bigcap \mathrm{cl}\,(z_i)$ jednočlan, dakle $\overline{\lim}\, z_i = 0$, pa $(y_i)_i$ algebarski konvergira prema 0.

II. U protivnom neka je S'' skup svih elemenata u S' koji nemaju manjeg u S'. Kad bi takvih bilo konačno, svih njihovih nadelemenata u S' bi isto bilo konačno, pa bismo od ostalih mogli napraviti beskonačno lanac, što je prvi slučaj. Dakle, u ovom slučaju je S'' beskonačan skup. Poredajmo njegove elemente u podniz $(w_i)_i$ od $(y_i)_i$. Niti jedna dva elementa od S'' nisu nadskup jedan drugome, pa moraju biti disjunktni. Radi toga $(w_i)_i$ algebarski konvergira prema 0.

Dakle, u oba slučaja svakom podnizu od $(x_i)_i$ smo našli podniz koji algebarski konvergira prema 0, pa zato $(x_i)_i$ topološki konvergira prema 0.

3.2. Neprekidnost osnovnih operacija i okoline nule

Lema 3.5.

Neka su $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ nizovi u B. Tada je:

1. $\underline{\lim}_n (x_n \vee y_n) \geq \underline{\lim}_n\, x_n \vee \underline{\lim}_n\, y_n$,
2. $\overline{\lim}_n (x_n \vee y_n) = \overline{\lim}_n\, x_n \vee \overline{\lim}_n\, y_n$.

Dokaz:

1. Neka su $x'_n = \bigwedge_{m \geq n} x_m$ i $y'_n = \bigwedge_{m \geq n} y_m$. Niz $(x'_n \vee y'_n)_n$ je rastući i $x'_n \vee y'_n \leq x_m \vee y_m$ čim je $m \geq n$, pa je $x'_n \vee y'_n \leq \bigwedge_{m \geq n}(x_m \vee y_m)$. Zato je:
$$\underline{\lim}_n\, x_n \vee \underline{\lim}_n\, y_n = \bigvee_n x'_n \vee \bigvee_n y'_n = \bigvee_n (x'_n \vee y'_n) \leq \bigvee_n \bigwedge_{m \geq n} (x_m \vee y_m) = \underline{\lim}_n (x_n \vee y_n).$$

2. Neka su $x''_n = \bigvee_{m \geq n} x_m$ i $y''_n = \bigvee_{m \geq n} y_m$ te neka je $x'' = \overline{\lim}_n\, x_n$ i $y'' = \overline{\lim}_n\, y_n$. Vrijedi:
$$\overline{\lim_n}(x_n \vee y_n) = \bigwedge_n \bigvee_{m \geq n} (x_m \vee y_m) = \bigwedge_n (x''_n \vee y''_n) \geq x'' \vee y''.$$

Dakle, $x'' \vee y''$ je donja međa od $\{x''_n \vee y''_n : n \in \omega\}$. Dokažimo da je infimum. Neka je $c > x'' \vee y''$ neki drugi element za koji je $c \leq x''_n \vee y''_n$ za svaki n. Tada je $d := c - (x'' \vee y'')$ različito od 0. Kako niz $(x''_n)_n$ pada u x'', postoji n takav da nije $d \leq x''_n$, tj. $d - x''_n \neq 0$. Analogno postoji $m \geq n$ takav da je $(d - x''_n) - y''_m = d - (x''_n \vee y''_m) \neq 0$. Tada je i $d - (x''_m \vee y''_m) \neq 0$, pa je i $c - (x''_m \vee y''_m) \neq 0$ što je u kontradikciji sa $c \leq x''_n \vee y''_n$ za svaki n.

Dakle, zaista je

$$x'' \vee y'' = \bigwedge_n (x''_n \vee y''_n) = \overline{\lim_n}(x_n \vee y_n).$$

■

Propozicija 3.6.

Neka je $a \in B$ i neka su $(x_n \xrightarrow[n]{} x), (y_n \xrightarrow[n]{} y) \in \mathcal{B}_B$. Tada je:

1. $(x_n \vee y_n \xrightarrow[n]{} x \vee y), (x_n \wedge y_n \xrightarrow[n]{} x \wedge y) \in \mathcal{B}_B$;
2. $(-x_n \xrightarrow[n]{} -x) \in \mathcal{B}_B$;
3. $(x_n \vee a \xrightarrow[n]{} x \vee a), (x_n \wedge a \xrightarrow[n]{} x \wedge a) \in \mathcal{B}_B$;
4. $(x_n - a \xrightarrow[n]{} x - a) \in \mathcal{B}_B$;
5. $(a - x_n \xrightarrow[n]{} a - x) \in \mathcal{B}_B$;
6. $(x_n \vartriangle a \xrightarrow[n]{} x \vartriangle a) \in \mathcal{B}_B$.

Dokaz:

Dokazati ćemo samo po jednu od dvije dualne tvrdnje.

1. Jasno iz prethodne leme.
2. Neka su $(x'_n)_n$ i $(x''_n)_n$ rastući i padajući niz koji uokviruju $(x_n)_n$ po propoziciji 3.2. Jasno su $(-x''_n)_n$ i $(-x'_n)_n$ redom rastući i padajući niz koji uokviruju $(-x_n)_n$ i po de Morganovim zakonima vrijedi $\bigvee -x''_n = \bigwedge -x'_n = -x$.
3. Direktno iz 1. za $y_n = a$.
4. Direktno iz 3.
5. Direktno 2. i 3.
6. Direktno iz 4., 5. i 1. ■

Korolar 3.7.

Neka je $a \in B$. Sljedeće funkcije $B \to B$ su neprekidne u Maharaminoj topologiji:

1. $x \mapsto -x$,
2. $x \mapsto x \vee a$,

3. $x \mapsto x \wedge a$,
4. $x \mapsto x - a$,
5. $x \mapsto a - x$,
6. $x \mapsto x \vartriangle a$.

Dokaz:
Po korolaru 1.17. sve tvrdnje direktno slijede iz točaka 2.-6. prethodne propozicije. ■

Za $a \in B$ funkcija $x \mapsto x \vartriangle a$ je sama sebi inverz, pa je kao neprekidna homeomorfizam na (B, τ_s). Primijetimo da nije homomorfizam na B kao Booleovoj algebri.

Radi toga je prostor (B, τ_s) homogem, tj. za svake $a, b \in B$ postoji homeomorfizam $h\colon B \to B$ takav da je $h(a) = b$, i on je zadan sa $h(x) = x \vartriangle a \vartriangle b$.

Slično, funkcija $x \mapsto -x$ je homeomorfizam. Ona je zapravo poseban slučaj funkcije $x \mapsto x \vartriangle a$ za $a = 1$.

Radi homogenosti Booleove topologije dovoljno je proučavati svojstva topologije oko bilo koje točke. Najjednostavnije je odabrati 0.

Propozicija 3.8.

1. *Ako su $(x_n \underset{n}{\to} x), (y_n \underset{n}{\to} y) \in \mathcal{B}_B$, tada je i $(x_n \vartriangle y_n \underset{n}{\to} x \vartriangle y) \in \mathcal{B}_B$.*
2. *Ako su $(x_n \underset{n}{\to} x), (y_n \underset{n}{\to} y) \in \mathcal{K}_B$, tada je i $(x_n \vartriangle y_n \underset{n}{\to} x \vartriangle y) \in \mathcal{K}_B$.*

Dokaz:

1. Radi točaka 1. i 6. propozicije 3.6. je $(x_n \vartriangle x \underset{n}{\to} 0), (y_n \vartriangle y \underset{n}{\to} 0) \in \mathcal{B}_B$, pa je i $((x_n \vartriangle x) \vee (y_n \vartriangle y) \underset{n}{\to} 0) \in \mathcal{B}_B$. Kako je $x_n \vartriangle y_n \leq x_n \vee y_n$, po točki 2. propozicije 3.4. je i $((x_n \vartriangle x) \vartriangle (y_n \vartriangle y) \underset{n}{\to} 0) \in \mathcal{B}_B$, pa je $(x_n \vartriangle y_n \underset{n}{\to} x \vartriangle y) \in \mathcal{B}_B$.
2. Slično kao u prethodnoj točki, radi točaka 2. i 6. propozicije 3.7. imajući u vidu propoziciju 1.15. je $(x_n \vartriangle x \underset{n}{\to} 0), (y_n \vartriangle y \underset{n}{\to} 0) \in \mathcal{K}_B$, pa je i $((x_n \vartriangle x) \vee (y_n \vartriangle y) \underset{n}{\to} 0) \in \mathcal{K}_B$. Kako je $x_n \vartriangle y_n \leq x_n \vee y_n$, po točki 3. propozicije 3.4. je i $((x_n \vartriangle x) \vartriangle (y_n \vartriangle y) \underset{n}{\to} 0) \in \mathcal{K}_B$, pa je $(x_n \vartriangle y_n \underset{n}{\to} x \vartriangle y) \in \mathcal{K}_B$. ■

Dokažimo alternativnu definiciju algebarske konvergencije.

Korolar 3.9.
Fiksirani niz $(x_n \underset{n}{\to} x)$ na B je iz $\mathcal{B}_B$ ako i samo ako je $\overline{\lim}_n (x_n \vartriangle x) = 0$.

Dokaz:
Jasno iz točke 6. propozicije 3.6. i točke 1. propozicije 3.4. ■

Propozicija 3.10.
Ako je B atomska onda je $\mathcal{B}_B$ familija konvergencije, tj. algebarska i topološka konvergencija se podudaraju.

Dokaz:
Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $(x_n \underset{n}{\to} x) \in \mathcal{K}_B \backslash \mathcal{B}_B$. Tada je i $(x_n \vartriangle x \underset{n}{\to} 0) \in \mathcal{K}_B \backslash \mathcal{B}_B$. Radi toga je $\overline{\lim}(x_n \vartriangle x) \neq 0$, pa neka je a atom koji je podelement od $\overline{\lim}(x_n \vartriangle x) = \bigwedge_{k\in\omega} \bigvee_{n\geq k} x_n$ što je podelement od $\bigvee_{n\geq k} x_n$ za svaki k. Po propoziciji 2.28. je $a \leq x_n$ za neki $n \geq k$, i to za svaki k. Radi toga ima u nizu $(x_n)_n$ beskonačno nadelemenata od a. Podniz takvih nazovimo sa $(y_n)_n$. Svaki njegov podniz je opet niz nadelemenata od a, pa ne može algebarski konvergirati prema 0. Dakle, našli smo podniz od $(x_n)_n$ koji nema podniz koji algebarski konvergira prema 0, pa $(x_n)_n$ ne konvergira ni topološki prema 0. ■

Označimo sa $\mathcal{N}_0$ familiju svih otvorenih okolina oko 0. U daljnjem tekstu ćemo radi jednostavnosti pod pojmom okolina smatrati otvorena okolina. Zbog homeomorfnosti $x \mapsto x \vartriangle a$ je U okolina oko a ako i samo ako je $U \vartriangle a \in \mathcal{N}_0$.

Lema 3.11.
Neka je $\{x_n\}_n \in \omega$ antilanac u B i $U \in \mathcal{N}_0$. Tada postoji $k \in \omega$ takav da je $B \upharpoonright \bigvee_{n\geq k} u_n \subseteq U$.

Dokaz:
Pretpostavimo suprotno, da takav k ne postoji. Onda za svaki k postoji $x_k \notin U$ koji je podelement od $\bigvee_{n\geq k} u_n$. Kako $(\bigvee_{n\geq k} u_n)_k$ algebarski konvergira prema 0, konvergira i $(x_k)_k$. Jer je U okolina oko 0, mora postojati $x_k \in U$, što je kontradikcija. ■

Propozicija 3.12.

1. *Svaki $U \in \mathcal{N}_0$ sadrži gotovo sve atome.*
2. *Ako je B bezatomna tada svaki $U \in \mathcal{N}_0$ sadrži algebarski gust skup zatvoren prema dolje.*
3. *Ako je B bezatomna tada je svaki $U \in \mathcal{N}_0$ algebarski gust.*
4. *Ako je B bezatomna i zadovoljava ccc, tada za svaki $U \in \mathcal{N}_0$ postoji $k \in \omega$ takav da je $1 \in U \vee \cdots \vee U$ (k puta).*

Dokaz:

1. Atomi koji nisu u U čine antilanac, pa ako je takvih beskonačno od njih bi se mogao napraviti niz koji algebarski konvergira prema 0, što ne može biti.

2. Okolina U sadrži algebarski gust skup zatvoren prema dolje ako i samo ako za svaki ne-nul $a \in B$ postoji ne-nul $c \leq a$ za koji $d \leq c$ implicira $d \in U$, jasno. Pa pretpostavimo suprotno, da postoji ne-nul $a \in B$ za koji takav c ne postoji.

   Niz $(x_n)_n$ konstruiramo ovako: x_n je ne-nul pravi podelement od $a - \bigvee_{k=0}^{n-1} x_k$ (postoji jer je B bezatomna). Svi x_n su jasno disjunktni i podelementi od a. Radi toga za njih ne smije vrijediti tvrdnja da $d \leq x_n$ implicira $d \in U$, pa neka je $y_n \leq x_n$ koji nije element od U. Jasno, i svi y_n-ovi su diskjunktni, pa $(y_n)_n$ algebarski konvergira prema 0. Kontradikcija.

3. Jasno iz 2.

4. Razmotrimo sve antilance sadržane u U. Po Zornovoj lemi postoji maksimalni takav antilanac A. Zbog ccc A je prebrojiv, pa kako je B σ-potpuna postoji $\bigvee A$. Dokažimo da je $\bigvee A = 1$. U protivnom, neka je $a = -\bigvee A \neq 0$ i neka je $b \leq a$ ne-nul element od U, koji postoji po 3. Tada je b disjunktan sa svakim elementom od A, pa je i $A \cup \{b\}$ antilanac sadržan u U, pa A nije maksimalan takav. Dakle, zaista je $\bigvee A = 1$.

   Elemente od A smjestimo u niz $(u_n)_n$. Po prethodnoj lemi postoji k takav da je $u = \bigvee_{n<k} u_n \in U$. Tada je $1 = \bigvee u_n = u_0 \vee \cdots \vee u_k \vee u$ spoj konačno mnogo elemenata iz U. ■

Propozicija 3.13.
Za svaki skup $A \subseteq B$ vrijedi:

$$cl\,(A) = \bigcap \{A \vartriangle V : V \in \mathcal{N}_0\}.$$

Dokaz:
Vrijedi da je $x \in \mathrm{cl}\,(A)$ ako i samo ako za svaki $V \in \mathcal{N}_0$ vrijedi $(x \vartriangle V) \cap A \neq \emptyset$, tj. postoji $y \in A$ takav da je $x \in y \vartriangle V$, tj. $x \in A \vartriangle V$. ■

Propozicija 3.14.
Neka je $A \subseteq B$ zatvoren prema dolje. Tada je

1. *$u(A)$ zatvoren prema dolje,*
2. *$cl\,(A)$ zatvoren prema dolje.*

Dualna tvrdnja vrijedi i za zatvorene prema gore.

Dokaz:

1. Neka je $a \in u(A)$ i neka je $b \leq a$. Tada postoji fiksirani niz $(a_i \underset{i}{\to} a) \in \mathcal{K}_B$ u A. Radi zatvorenosti prema dolje je $b \wedge a_i \in A$, i radi neprekidnosti je $(a_i \wedge b \underset{i}{\to} a \wedge b = b) \in \mathcal{K}_B$, pa je $b \in u(A)$.
2. Transfinitnom indukcijom iz 1. ■

3.3. Fréchetovi Maharamini prostori

Propozicija 3.15.
Ako je Maharamin prostor Fréchetov tada za svaki V iz $\mathcal{N}_0$ postoji $U \subseteq V$ iz $\mathcal{N}_0$ koji je zatvoren prema dolje.

Dokaz:
Skup

$$X := \{a \in B \colon \text{postoji } b \leq a \text{ takav da } b \notin V\}$$

je jasno zatvoren prema gore. Po propoziciji 3.14. je i $u(X)$ je zatvoren prema gore, pa je $U := B \backslash u(X)$ zatvoren prema dolje. Jasno je $U \subseteq V$. Kako je (B, τ_s) Fréchetov, $u(X)$ je zatvoren, pa je U otvoren. Dokažimo da sadrži 0.
Pretpostavimo suprotno, da je $0 \in u(X)$, tj. postoji niz $(x_n)_n$ u X koji algebarski konvergira prema 0. Pa po definiciji X postoje $b_n \leq x_n$ koji nisu u V. Niz $(b_n)_n$ kao odozgo ograničen sa $(x_n)_n$ mora isto algebarski konvergirati prema 0, ali to ne može jer je cijeli izvan V koji je okolina nule. ■

Ako je Maharamin prostor Fréchetov, po gornjoj propoziciji skup svih prema dolje zatvorenih okolina nule $\mathcal{N}_0^d$ je baza okolina oko 0, i on zato u potpunosti određuje topologiju τ_s.

Korolar 3.16.
Neka je B bezatomna i zadovoljava ccc, te neka je Maharamin prostor (B, τ_s) Fréchetov. Tada za svaki $U \in \mathcal{N}_0$ postoji $k \in \omega$ takav da je $1 \in U \vartriangle \cdots \vartriangle U$ (k puta).

Dokaz:
Neka je $V \subseteq U$ okolina nule zatvorena prema dolje, koja postoji po prethodnoj propoziciji. Po točki 4. propozicije 3.12. postoji $k \in \omega$ takav da je $1 \in O \vee \cdots \vee O$ (k puta).

Međutim, za prema dolje zatvorene skupove se spoj i simetrična razlika podudaraju, pa je $1 \in O \vartriangle \cdots \vartriangle O$ (k puta), i onda je jasno $1 \in U \vartriangle \cdots \vartriangle U$ (k puta). ■

Propozicija 3.17.

Neka je Maharamin prostor (B, τ_s) Fréchetov. Tada za svaki prema dolje zatvoreni skup $A \subseteq B$ vrijedi

$$cl\,(A) = \bigcap \{A \vee V \colon V \in \mathcal{N}_0^d\}.$$

Dokaz:

Dokaz je potpuno analogan dokazu propozicije 3.13., uz napomenu da je $A \vartriangle V = A \vee B$ budući da su oba zatvorena prema dolje. ■

Lema 3.18.

Neka je Maharamin prostor (B, τ_s) Fréchetov. Tada za svaki $U \in \mathcal{N}_0^d$ postoji $V \in \mathcal{N}_0^d$ takav da je $V \vee V \vee V \subseteq U \vee U$.

Dokaz:

Pretpostavimo suprotno, tj. da za svaki $V \in \mathcal{N}_0^d$ postoje $x, y, z \in V$ takvi da $x \vee y \vee z \notin U \vee U$.

Neka je $V_0 = U$. Rekurzivno, neka su $x_n, y_n, z_n \in V_n$ takvi da $x_n \vee y_n \vee z_n \notin U \vee U$. Neka je X_n praslika od V_n po funkciji koja a preslikava u $a \vee x_n$. Skup X_n je otvoren jer je spomenuta funkcija neprekidna, i sadrži 0 jer je $0 \vee x_n = x_n \in V_n$. Analogno definirajmo Y_n i Z_n, te neka je $V_{n+1} \in \mathcal{N}_0^d$ okolina nule koja sadrži $X_n \cap Y_n \cap Z_n$. Jasno je $V_{n+1} \subseteq X_n \subseteq V_n$.

Neka je $C = \bigcap_n \mathrm{cl}\,(V_n)$, te $x' = \overline{\lim}\, x_n$, $y' = \overline{\lim}\, y_n$ i $z' = \overline{\lim}\, z_n$. C je (topološki) zatvoren i zatvoren prema dolje te vrijedi $C \subseteq \mathrm{cl}\,(V_0) = \mathrm{cl}\,(U) \subseteq U \vee U$, po propoziciji 3.17.

Tvrdimo da su $x', y', z' \in C$. Dovoljno je dokazati da je $x' \in \mathrm{cl}\,(V_n)$ za svaki n. Znamo da je $x_n \in V_n \subseteq V_m$ čim je $n \geq m$, pa indukcijom dobijemo da je $x_n \vee x_{n+1} \vee \cdots \vee x_{n+k} \in V_n$. Dakle, $\bigvee_{i \geq n} x_i \in \mathrm{cl}\,(V_n)$ iz čega slijedi $x' \in \mathrm{cl}\,(V_n)$.

Dalje tvrdimo da je $x' \vee C \subseteq C$, i slično za y' i z'. Dovoljno je dokazati da je $x' \vee C \subseteq \mathrm{cl}\,(V_n)$ za svaki n. Znamo da je $x_n \vee V_{n+1} \subseteq V_n \subseteq V_m$ čim je $n \geq m$, pa indukcijom dobijemo da je $x_n \vee x_{n+1} \vee \cdots \vee x_{n+k} \vee V_{n+k+1} \subseteq V_n$. Radi neprekidnosti spoja s fiksnim elementom je $x_n \vee x_{n+1} \vee \cdots \vee x_{n+k} \vee \mathrm{cl}\,(V_{n+k+1}) \subseteq \mathrm{cl}\,(V_n)$. Radi toga je i $x_n \vee x_{n+1} \vee \cdots \vee x_{n+k} \vee C \subseteq \mathrm{cl}\,(V_n)$, pa je $\bigvee_{i \geq n} x_i \vee C \subseteq \mathrm{cl}\,(V_n)$. No x'je podelement od $\bigvee_{i \geq n} x_i$ i $\mathrm{cl}\,(V_n)$ je prema dolje zatvoren, pa je $x' \vee C \subseteq \mathrm{cl}\,(V_n)$.

Dakle, $x' \vee y' \vee z'$ je u C, pa je i u $U \vee U$. Po točki 2. leme 3.5. je $x' \vee y' \vee z' = \overline{\lim}_n (x_n \vee y_n \vee z_n)$. Znamo da vrijedi $x_n \vee y_n \vee z_n \notin U \vee U$, pa kako je komplement od $U \vee U$ zatvoren prema gore, vrijedi i $\bigvee_{i\geq n}(x_i \vee y_i \vee z_i) \notin U \vee U$. Zbog toga vrijedi $x' \vee y' \vee z' = \bigwedge_n \bigvee_{i\geq n}(x_i \vee y_i \vee z_i) \notin \operatorname{int}(U \vee U)$. No $U \vee U = U \vartriangle U = \bigcup_{x\in U} x \vartriangle U$ je otvoren, pa $x' \vee y' \vee z'$ nije u $U \vee U$, što je kontradikcija. ■

Za Maharamine prostore možemo pojačati Teorem 1.20.:

Definicija 3.C

Kažemo da je beskonačna matrica $(a_{m,n})_{m,n\in\omega}$ elemenata iz B *padajuća* ako je za svaki m niz $(a_{m,n})_n$ padajući i algebarski konvergira prema 0.

Dualno, kažemo da je beskonačna matrica $(a_{m,n})_{m,n\in\omega}$ elemenata iz B *rastuća* ako je za svaki m niz $(a_{m,n})_n$ rastući i algebarski konvergira prema 1.

Kada kažemo matrica misliti ćemo na beskonačnu matricu.

Teorem 3.19.

Ekvivalentno je:

(i) Maharamin prostor (B, τ_s) je Fréchetov.

(ii) Za svaku padajuću matricu $(a_{m,n})_{m,n}$ u B postoji funkcija $f : \omega \to \omega$ takva da je $(a_{m,f(m)} \underset{m}{\to} 0) \in \mathcal{K}_B$.

(iii) Za svaku padajuću matricu $(a_{m,n})_{m,n}$ u B postoji funkcija $f : \omega \to \omega$ takva da je $(a_{m,f(m)} \underset{m}{\to} 0) \in \mathcal{B}_B$.

(iv) Za svaku rastuću matricu $(a_{m,n})_{m,n}$ u B postoji funkcija $f : \omega \to \omega$ takva da je $(a_{m,f(m)} \underset{m}{\to} 1) \in \mathcal{B}_B$.

(v) Za svaku matricu $(a_{m,n})_{m,n}$ u B, niz $(x_m)_m$ u B i $t \in B$ za koje je $(a_{m,n} \underset{n}{\to} x_m) \in \mathcal{B}_B$ za svaki m i $(x_m \underset{m}{\to} t) \in \mathcal{K}_B$ postoji funkija $f : \omega \to \omega$ takva da je $(a_{m,f(m)} \underset{m}{\to} t) \in \mathcal{K}_B$.

(vi) Za svaku matricu $(a_{m,n})_{m,n}$ u B, niz $(x_m)_m$ u B i $t \in B$ za koje je $(a_{m,n} \underset{n}{\to} x_m) \in \mathcal{K}_B$ za svaki m i $(x_m \underset{m}{\to} t) \in \mathcal{K}_B$ postoji funkija $f : \omega \to \omega$ takva da je $(a_{m,f(m)} \underset{m}{\to} t) \in \mathcal{K}_B$.

Dokaz:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Ako svaki od nizova $(a_{m,n})_n$ ima nulu, tvrdnja je jasna. Inače, onaj koji nema nulu nazovimo sa $(y_m)_m$. Tada je $(a_{m,n} \vartriangle y_m \underset{n}{\to} y_m) \in \mathcal{K}_B$ za svaki m. Sada se možemo pozvati na Teorem 1.20., pa postoji funkcija $f : \omega \to \omega$ takva da je $(a_{m,f(m)} \vartriangle y_m \underset{m}{\to} 0) \in \mathcal{K}_B$. Po točki 2. propozicije 3.8. je i $(a_{m,f(m)} \underset{m}{\to} 0) \in \mathcal{K}_B$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Neka je
$$b_{m,n} = \bigvee_{k \leq m} a_{k,n}.$$
Jasno je matrica $(b_{m,n})_{m,n}$ isto padajuća. Po (ii) onda postoji $f\colon \omega \to \omega$ takva da je $(b_{m,f(m)} \underset{m}{\to} 0) \in \mathcal{K}_B$, i zato on ima podniz $(b_{m_i,f(m_i)} \underset{i}{\to} 0) \in \mathcal{B}_B$.

Za $m \in \omega$ označimo sa m' najmanji broj veći ili jedak m koji se javlja u nizu $(m_i)_i$. Niz $(b_{m',f(m')})_m$ je praktički jednak nizu $(b_{m_i,f(m_i)})_i$, samo što se možda neki elementi pojavljuju više puta zaredom. Zato su im jasno limes inferior i limes superior jednaki, pa je i $(b_{m',f(m')} \underset{m}{\to} 0) \in \mathcal{B}_B$.

Iz definicije b je $a_{m,f(m')} \leq b_{m,f(m')} \leq b_{m',f(m')}$, pa je i $(a_{m,f(m')} \underset{m}{\to} 0) \in \mathcal{B}_B$. Dakle, funkcija $g\colon m \mapsto f(m')$ zadovoljava (iii).

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv): Jasno.

(iii) $\Rightarrow$ (v): Neka su $(a_{m,n})_{m,n}$, niz $(x_m)_m$ i t kao u (v). Definirajmo:
$$b_{m,n} = a_{m,n} \bigtriangleup x_m,$$
$$c_{m,n} = \bigvee_{k \geq n} b_{m,k}.$$
Jasno je $(b_{m,n} \underset{n}{\to} 0) \in \mathcal{B}_B$. Svaki niz $(c_{m,n})_n$ je padajući i algebarski konvergira prema
$$\bigwedge_{n} \bigvee_{k \geq n} b_{m,k} = \overline{\lim_{n}}\, b_{m,n} = 0.$$
Zato je matrica $(c_{m,n})_{m,n}$ padajuća, pa po (iii) postoji funkcija $f\colon \omega \to \omega$ takva da je $(c_{m,f(m)} \underset{m}{\to} 0) \in \mathcal{B}_B$. Radi $b_{m,n} \leq c_{m,n}$ je i $(b_{m,f(m)} \underset{m}{\to} 0) \in \mathcal{B}_B$, pa je $(a_{m,f(m)} \underset{m}{\to} t) \in \mathcal{K}_B$.

(v) $\Rightarrow$ (vi): Svaki $(a_{m,n} \underset{n}{\to} x_m)$ ima podniz $(a_{m,n_i} \underset{i}{\to} x_m) \in \mathcal{B}_B$. Matrica $(a_{m,n_i})_{m,i}$, niz $(x_m)_m$ i t zadovoljavaju uvjete iz (v), pa postoji funkcija $f\colon \omega \to \omega$ takva da je $(a_{m,n_{f(m)}} \underset{m}{\to} t) \in \mathcal{K}_B$. Fukcija $g\colon m \mapsto n_{f(m)}$ zadovoljava (vi).

(vi) $\Rightarrow$ (i): Potpuno analogno dokazu u teoremu 1.20. **Q.E.D.**

Definicija 3.D

Granični broj **b** je najmanji kardinalni broj familije $\mathcal{F}$ funkcija s ω u ω takav da je $\mathcal{F}$ neograničen u smislu da za svaku funkciju $g\colon \omega \to \omega$ postoji funkcija $f \in \mathcal{F}$ takva da je $g(n) \leq f(n)$ za beskonačno mnogo n-ova.

Propozicija 3.20.

Vrijedi:
$$\omega_1 \leq \mathbf{b} \leq \mathbf{c}.$$

Dokaz:

Cijeli skup ω^ω je kardinaliteta $\mathbf{c}$, pa je druga nejednakost jasna.

Pretpostavimo da prva ne vrijedi, tj. da postoji niz $(f_n)_n$ funkcija iz ω^ω koji je neograničen u smislu iz definicije graničnog broja. Konstruirajmo funkciju $g\colon \omega \to \omega$ ovako:

$$g(i) = \max\{f_n(i)\colon n \leq i\} + 1.$$

Za fiksni m je $g(i) > f_m(i)$ za sve $i \geq m$, dakle $(f_n)_n$ nije ograničen. ∎

Ako vrijedi hipoteza kontinuuma primijetimo da je uvođenje graničnog broja nepotrebno jer je tada on jednak $\omega_1 = \mathbf{c}$.

Teorem 3.21.

Neka je B potpuna Booleova algebra. Maharamin prostor (B, τ_s) je Fréchetov ako i samo ako je B slabo distributivna i zadovoljava uvjet $\mathbf{b}$-lanca.

Prije dokaza dokažimo jednu lemu:

Lema 3.22.

Potpuna Booleova algebra B je slabo distributivna ako i samo ako za svaku rastuću matricu $(a_{m,n})_{m,n}$ vrijedi:

$$\bigvee_{f\in\omega^\omega} \varliminf_m a_{m,f(m)} = 1.$$

Dokaz:

Neka je B slabo distributivna i neka je $(a_{m,n})_{m,n}$ rastuća matrica. Neka je

$$b_{m,n} = a_{m,n} - \left(\bigvee_{i<n} a_{m,i}\right).$$

Tada je za svaki m familija$P_m = \{b_{m,n}\colon n \in \omega\}$ maksimalni antilanac.

Označimo lijeva stranu jednakosti koju dokazujemo sa l. Pretpostavimo da jednakost ne vrijedi, tj. da je $-l > 0$. Zbog slabe distributivnosti postoji ne-nul $c \leq -l$ koji za fiksni m susreće samo konačno mnogo $b_{m,n}$-ova. Zato je c podelement spoja prvih konačno $b_{m,n}$-ova, tj. podelement je $a_{m,k}$-a za neki k. Broj k ovisi o m, pa neka je $f \in \omega^\omega$ funkcija koja svakom m-u pridružuje njegov k. Tada je dakle $c \leq a_{m,f(m)}$ za svaki m, tj. $c \leq \bigwedge_{m\in\omega} a_{m,f(m)} \leq \varliminf a_{m,f(m)} \leq l$. Dobili smo da je ne-nul c manji i od l i od $-l$, što ne može biti, dakle jednakost vrijedi.

Obratno, neka za svaku rastuću matricu vrijedi jednakost, neka je $(\{b_{m,n}\colon n \in \omega\})_m = (P_m)_m$ niz prebrojivih antilanaca i neka je x ne-nul element iz B. Neka je

$$a_{m,n} = \bigvee_{i \leq n} b_{m,n}.$$

Jasno je $a_{m,n}$ rastuća matrica. Zbog jednakosti, element x mora susretati $\underline{\lim}\, a_{m,f(m)}$ za neku funkciju $f \in \omega^\omega$, pa neka je $y = x \wedge \underline{\lim}\, a_{m,f(m)} \neq 0$. Nadalje,

$$\underline{\lim}\, a_{m,f(m)} = \bigvee_{k \in \omega} \bigwedge_{m \geq k} a_{m,f(m)},$$

pa y mora susretati $\bigwedge_{m \geq k} a_{m,f(m)}$ za neki k, pa neka je $y_0 = y \wedge \bigwedge_{m \geq k} a_{m,f(m)} \neq 0$. Tako definirani y_0 za fiksni $m \geq k$ može susretati samo $b_{m,n}$-ove gdje je $n \leq f(m)$ kojih je konačno mnogo u svakom antilancu. Dalje opet istom logikom neka je

$$y_i = y_{i-1} \wedge b_{i-1,s(i-1)}$$

za $i = 1, \ldots, k-1$ gdje je $b_{i-1,s(i-1)}$ onaj element antilanca P_{i-1} kojeg susreće y_i. Tako smo osigurali da je svaki y_i ne-nul i posljednji y_{k-1} susreće samo jedan element iz svakog antilanca P_m za $m < k$. Za ostale m-ove je već y_0 susretao samo konačno mnogo elemenata antilanca P_m, pa ih i y_{k-1} susreće samo konačno. Dakle B je slabo distributivna. ■

Dokaz teorema:

Dokazat ćemo ekvivalenciju sa tvrdnjom (iv) iz Teorema 3.19.

Neka je B slabo distributivna i zadovoljava uvjet **b**-lanca, te neka je $(a_{m,n})_{m,n}$ rastuća matrica. Prema prethodnoj lemi je

$$\bigvee_{f \in \omega^\omega} \underline{\lim}_m\, a_{m,f(m)} = 1,$$

a zbog uvjeta **b**-lanca po propoziciji 2.32. postoji familija $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ kardinaliteta manjeg od **b** takva da je

$$\bigvee_{f \in \mathcal{F}} \underline{\lim}_m\, a_{m,f(m)} = 1.$$

Familija $\mathcal{F}$ je ograničena, pa postoji funkcija $g\colon \omega \to \omega$ takva da je za svaku funkciju $f \in \mathcal{F}$ $g(n) > f(n)$ za gotovo sve n. Budući da je matrica rastuća za svaki $f \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$\underline{\lim}_m\, a_{m,f(m)} \leq \underline{\lim}_m\, a_{m,g(m)}$$

i zato je

$$\underline{\lim}_m\, a_{m,g(m)} \geq \bigvee_{f \in \mathcal{F}} \underline{\lim}_m\, a_{m,f(m)} = 1$$

iz čega jasno slijedi tvrdnja da je $(a_{m,g(m)} \xrightarrow[m]{} 1) \in \mathcal{B}_B$.

Obratno, uvjet iz prethodne leme jasno vrijedi, pa je B slabo distributivna. Neka je W maksimalni antilanac. Dokažimo da je $|W| < \mathbf{b}$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji neograničena familija $\mathcal{F}$ funkcija iz ω^ω ekvipotentna sa W. Tada je možemo indeksirati elementima iz W: $\mathcal{F} = \{f_u : u \in W\}$. Za $m, n \in \omega$ neka su

$$a_{m,n} = \bigvee \{u \in W : f_u(m) < n\}.$$

Direktno se vidi da je matrica $\{a_{m,n}\}$ rastuća, pa po pretpostavci postoji funkcija $g : \omega \to \omega$ takva da je $(a_{m,g(m)} \xrightarrow[m]{} 1) \in \mathcal{B}_B$.

Neka je $u \in W$. Svaki $a_{m,n}$ je po definiciji ili nadelement od u ili disjunktan s njime. Kada bi beskonačno $a_{m,g(m)}$-ova bilo disjunktno sa u, onda bi i $1 = \underline{\lim}\, a_{m,g(m)}$ bio disjunktan s u, što nije. Dakle, za svaki $u \in W$ postoji m_u takav da je $u \leq a_{m,g(m)}$ za svaki $m \geq m_u$. Po definiciji matrice to znači da je $f_u(m) < g(m)$ za svaki $m \geq m_u$, dakle g ograničuje sve f_u-ove. Kontradikcija. **Q.E.D.**

Korolar 3.23.

Neka je B potpuna ccc Booleova algebra. Maharamin prostor (B, τ_s) je Fréchetov ako i samo ako je B slabo distributivna.

3.4. Teorem dekompozicije

Propozicija 3.24.

Neka je $a \in B$. Prostor $(B \upharpoonright a, \tau_s)$ je zatvoreni podprostor od (B, τ_s).

Dokaz:

Limes algebarski konvergentnog niza elemenata manjih od a je jasno manji od a iz čega slijedi da je skup $B \upharpoonright a$ zatvoren u (B, τ_s). Familija algebarskih konvergencija na $B \upharpoonright$ a je jasno restrikcija familije algebarskih konvergencija na B, pa druga tvrdnja slijedi po propoziciji 1.21. ■

Definicija 3.E

Topološki prostor je *anti-Hausdorffov* ako je zatvarač svakog nepraznog otvorenog skupa cijeli prostor.

Primijetimo da je prostor anti-Hausdorffov ako i samo ako niti jedne dvije točke ne možemo razdvojiti disjunktnim okolinama, odakle i dolazi naziv.

Teorem 3.25. (Teorem dekompozicije)
Neka je B potpuna ccc Booleova algebra. Tada postoji $d \in B$ takav da vrijedi:

(i) Maharamin prostor $(B \upharpoonright d, \tau_s)$ je anti-Hausdorffov;

(ii) Maharamin prostor $(B \upharpoonright -d, \tau_s)$ je Hausdorffov.

Dokaz:
Prvo dokažimo teorem u slučaju da je B slabo distributivna. Tada je po korolaru 3.23. (B, τ_s) Fréchetov. Neka je

$$D := \bigcap \{\mathrm{cl}\,(U) : U \in \mathcal{N}_0^d\} = \bigcap \{U \vartriangle V : U, V \in \mathcal{N}_0^d\}.$$

D je jasno zatvoren i zatvoren prema dolje. Za svake $U, V \in \mathcal{N}_0^d$ je $W := U \cap V \in \mathcal{N}_0^d$. Jasno je onda $W \vartriangle W = W \vee W \subseteq U \vee V = U \vartriangle V$, pa je

$$D = \bigcap \{U \vartriangle U : U \in \mathcal{N}_0^d\}.$$

Trebat će nam jedna lema:

Lema 3.26.
$D \vee D = D$

Dokaz:
Neka je $U \in \mathcal{N}_0^d$. Po lemi 3.18. postoji $U_1 \in \mathcal{N}_0^d$ takav da je $U_1 \vee U_1 \vee U_1 \subseteq U \vee U$. Opet, postoji $U_2 \in \mathcal{N}_0^d$ takav da je $U_2 \vee U_2 \vee U_2 \subseteq U_1 \vee U_1$. Neka je $V = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{N}_0^d$. Tada je $V \vee V \vee V \vee V \subseteq U_1 \vee U_2 \vee U_2 \vee U_2 \subseteq U_1 \vee U_1 \vee U_1 \subseteq U \vee U$. Zato je

$$D = \bigcap \{U \vee U \vee U \vee U : U \in \mathcal{N}_0^d\}.$$

Neka su $a, b \in D$. Za svaki $V \in \mathcal{N}_0^d$ je $a, b \in V \vee V$, pa je $a \vee b \in V \vee V \vee V \vee V$, pa je po gornjoj jednakosti $a \vee b \in D$. Dakle $D \vee D \subseteq D$. Druga nejednakost je očita. ∎

Neka je $d = \bigvee D$ i $A = \{a_n : n \in \omega\}$ maksimalni antilanac u D koji je prebrojiv zbog ccc. Pretpostavimo da je $\bigvee A \neq d$. Tada $d - \bigvee A$ susreće neki element e iz D (jer inače d ne bi mogao biti supremum od D), pa je onda i $e \wedge (d - \bigvee A) \leq e \in D$ koji možemo dodati antilancu da dobijemo veći antilanac; kontradikcija.
Dakle $\bigvee A = d$, pa niz $(\bigvee_{k=0}^{n} a_k)_n$ koji je u D zbog leme, konvergira prema d. Kako je D zatvoren, i d je u D. Dakle, D je zapravo glavni ideal $B \upharpoonright d$. Dokažimo da upravo ovaj d zadovoljava uvjet teorema.
Neka je G otvoren skup u $B \upharpoonright d = D$. Tada postoje $a \in G$ i $U \in \mathcal{N}_0^d$ takvi da je $G \supseteq (a \vartriangle U) \cap D$. Iz definicije D je $\mathrm{cl}\,(a \vartriangle U) \supseteq a \vartriangle D$. No za $a, b \in D$ je $a \vartriangle b \leq a \vee b \in D$, pa je $a \vartriangle D = D$. Dakle, $\mathrm{cl}\,(G) \supseteq D$, iz čega slijedi da je $B \upharpoonright d$ anti-Hausdorffov.

Neka je $a \in B \upharpoonright -d$ tj. $a \leq -d$. Tada $a \notin D$, pa postoji $U \in \mathcal{N}_0^d$ takav da $a \notin U \vartriangle U$. Pretpostavimo da postoji $x \in U \cap (a \vartriangle U)$. Tada je $a \vartriangle x \in U$, što ne može biti. Dakle, U i $a \vartriangle U$ su disjunktni otvoreni oko 0 i a. Jasno, onda su $U \cap (B \upharpoonright -d)$ i $(a \vartriangle U) \cap (B \upharpoonright -d)$ disjunktni otvoreni oko 0 i a u $(B \upharpoonright -d, \tau_s)$. Zbog homogenosti prostora onda možemo razdvojiti bilo koja dva njegova elementa, dakle $(B \upharpoonright -d, \tau_s)$ je Hausdorffov.

Ako B nije slabo distributivna, onda po Teoremu 2.36. postoji $d_1 \in B$ takav da je $B \upharpoonright -d_1$ slabo distributivna i $B \upharpoonright d_1$ nigdje slabo distributivna. Na $B \upharpoonright -d_1$ primijenimo dosadašnje razmatranje, pa neka je $d_2 \in B \upharpoonright -d_1$ takav da je $(B \upharpoonright d_2, \tau_s)$ anti-Hausdorffov, a $(B \upharpoonright -(d_1 \vee d_2), \tau_s)$ Hausdorffov. Za $d = d_1 \vee d_2$ dakle vrijedi da je $(B \upharpoonright -d, \tau_s)$ Hausdorffov, pa dokažimo da je $(B \upharpoonright d, \tau_s)$ anti-Hausdorffov:

Neka je U otvorena okolina nule u $(B \upharpoonright d, \tau_s)$. Direktno se vidi da je $B \upharpoonright d_2$ zatvoren u $(B \upharpoonright d, \tau_s)$, i $V := U \cap B \upharpoonright d_2$ je otvorena okolina nule u prostoru $(B \upharpoonright d_2, \tau_s)$.

Neka je c proizvoljan podelement od d. Dovoljno je dokazati da je c u zatvaraču od U. Neka je $c_1 = c \wedge d_1$ i $c_2 = c \wedge d_2$. Kako je $(B \upharpoonright d_2, \tau_s)$ anti-Hausdorffov, c_2 je u zatvaraču od V u prostoru $(B \upharpoonright d_2, \tau_s)$ koji je Fréchetov kao potprostor Fréchetovog. Zato postoji niz $(z_n)_n$ u V koji algebarski konvergira prema c_2. Ako dokažemo da je $c_1 \vee z_n \in \mathrm{cl}\,(U)$ za svaki n, biti će jasno da je c kao algebarski limes niza $(c_1 \vee z_n)_n$ u $\mathrm{cl}\,(U)$. Pa dokažimo to.

Možemo fiksirati n. Booleova algebra $B \upharpoonright d_1$ je nigdje slabo distributivna, pa postoji beskonačna matrica $(a_{m,n})_{m,n}$ u kojoj je svaki redak $\{a_{m,n} : n \in \omega\}$ maksimalni antilanac na $B \upharpoonright d_1$ takav da svaki ne-nul $a \leq d_1$ susreće beskonačno elemenata svakog tog antilanca. Neka je

$$y_{k,l} = c_1 \wedge \bigvee_{i \geq l} a_{k,i}.$$

Odredimo rekurzivno niz $(x_k)_k$ u U takav da je $z_n \vee x_k \in U$ i $x_k \leq c_1$ za svaki k.

Neka je $x_0 = 0$. Znamo da je $z_n \vee 0 \in U$.

Neka smo već odredili x_k. Niz $(y_{k,l})_l$ algebarski konvergira prema 0, pa niz $(y_{k,l} \vee z_n \vee x_k)_l$ algebarski konvergira prema $z_n \vee x_k \in U$, i zato postoji l_k takav da je $y_{k,l_k} \vee z_n \vee x_k \in U$. Neka je $x_{k+1} = y_{k,l_k} \vee x_k$. Jasno je $z_n \vee x_{k+1} \in U$ i $x_{k+1} \leq z_1$.

Niz $(x_k)_k$ je rastući, pa algebarski konvergira prema $\bigvee_k x_k \leq c_1$. Nazovimo $b = c_1 - \bigvee_k x_k$. Spoj $\bigvee_k x_k$ je spoj po jednog $y_{k,l}$ za svaki k, dakle spoj gotovo svih $a_{k,i}$ za određeni k, pa b susreće konačno mnogo elemenata iz svakog antilanca $\{a_{m,n} : n \in \omega\}$. Zbog nigdje slabe distributivnosti je $b = 0$, pa niz $(x_k)_k$ algebarski konvergira prema c_1. Zato niz $(x_k \vee z_n)_k$ algebarski konvergira prema $c_1 \vee z_n$, pa je $(c_1 \vee z_n)_n \in \mathrm{cl}\,(U)$. **Q.E.D.**

Što dalje

Uveli smo topologiju na Booleovim algebrama i rekli nekoliko zanimljivih rezultata o njoj. Jasno, mnogo toga se još može reći o toj topologiji, ali ja bih ovdje radije spomenuo mogućnost uvođenja Maharamine podmjere, koja je uvedena u [Ma].

Definicija

Maharamina podmjera na Booleovoj algebri B je ne-negativna funkcija $\mu\colon B \to \mathbb{R}$ takva da je za sve $a, b \in B$:

(M1) $\mu(0) = 0$;

(M2) $\mu(a) \leq \mu(b)$ čim je $a \leq b$;

(M3) $\mu(a \vee b) \leq \mu(a) + \mu(b)$;

(M4) $\lim(a_n) = 0$ za svaki niz $(a_n)_n$ koji algebarski konvergira prema 0.

Maharamina podmjera je strogo pozitivna ako za svaki $a \in B$ vrijedi:

(M5) $\mu(a) = 0$ ako i samo ako je $a = 0$.

Veza ove podmjere i topologije navedena je u [Ba1]. Kao najzanimljiviji rezultat bez dokaza ću navesti teorem:

Teorem

Neka je B potpuna Booleova algebra. Ekvivalentno je:

(i) B je ccc i Maharamin prostor (B, τ_s) je Hausdorffov,

(ii) prostor (B, τ_s) je metrizabilan,

(iii) na B postoji strogo pozitivna Maharamina podmjera.

Literatura

[Si] R. Sikorski, Boolean algebras, Springer-Verlay, 1964.

[Ha] P. R. Halmos, Lectures on Boolean algebras, D. Van Nostrand Co., 1963.

[Ma] D. Maharam, 'An algebraic characterization of measure algebras', Ann. of Math. 48. (1947.) 154.–167.

[Ba1] B. Balcar, W. Główczyński i T. Jech, 'The sequential topology on complete Boolean algebras', Fund. Math. 155. (1998.) 59.–78.

[Ba2] B. Balcar, T. Jech i T. Pazak, 'Complete ccc Boolean algebras, the order sequential topology, and a problem of von Neumann', Bull. London Math. soc. 37. (2005.) 885.–898.